

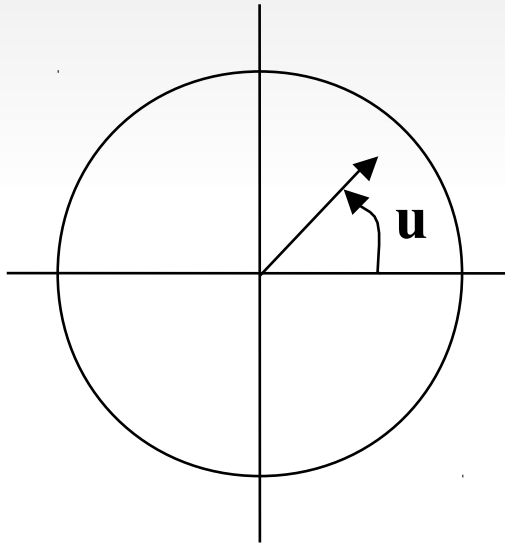
Courbes & Surfaces Paramétriques

Paramétrique / Implicite
Courbes Paramétriques (Splines)
Surfaces Paramétriques
Subdivision

**Marc Neveu – LE2I –
Université de Bourgogne**

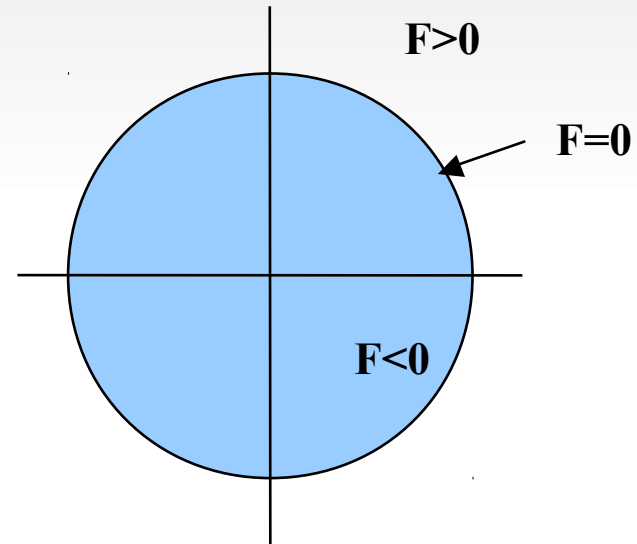
2 façons de définir un cercle

Paramétrique



$$\begin{cases} x(u) = r \cdot \cos(u) \\ y(u) = r \cdot \sin(u) \end{cases}$$

Implicite



$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

Représentations d'une courbe (2D)

Explicite : $y = y(x)$

$$y = mx + b \quad y = x^2$$

doit être une fonction ($x \rightarrow y$) : limitation importante

Paramétrique : $(x, y) = (x(u), y(u))$

$$(x, y) = (\cos u, \sin u)$$

+ facile à spécifier

- variable additionnelle cachée u : le paramètre

Implicite : $f(x, y) = 0$

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

+ y peut être une fonction multivaluée de x

- difficile à spécifier, modifier, contrôler

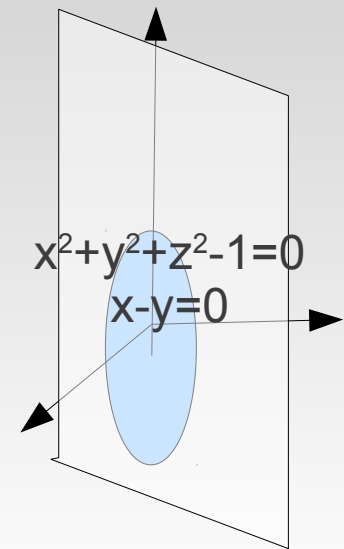
Représentations des courbes et surfaces (3D)

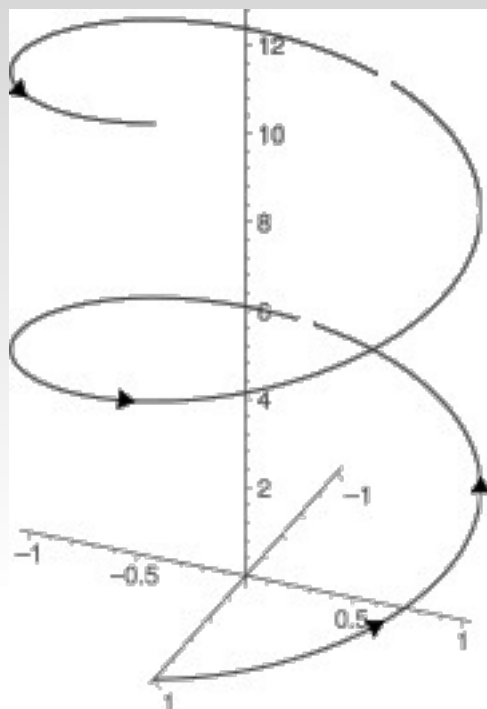
- Représentation Implicite

- Courbes : $f(x,y,z) = 0$ et $g(x,y,z) = 0$
- Surfaces : $f(x,y,z) = 0$

- Représentation Paramétrique

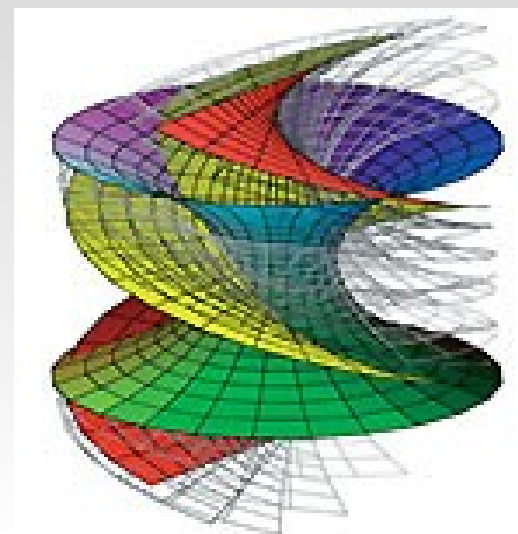
- Courbes : $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$
- Surfaces : $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$
- Courbe Cubique :
 - $x = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$
 - $y = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$
 - $z = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$





$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R \cdot \cos(2\pi \cdot t) \\ y(t) = y_0 + R \cdot \sin(2\pi \cdot t) \\ z(t) = z_0 + p \cdot t \end{cases}$$

Hélice passant par (x_0, y_0, z_0) , rayon R ,
pas p



Helicoïde :

$u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = v \cdot \cos(u) \\ y = v \cdot \sin(u) \\ z = u \end{cases}$$

Représentation des Surfaces

Surface Paramétrique – $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Ex : plan, sphère, cylindre, tore, surface bicubique, surface de balayage

Les fonctions paramétriques permettent de se déplacer sur la surface en faisant varier u et v (ex en boucles imbriquées)

Pratique pour maillages polygonaux, etc

Terrible pour les intersections (rayon/surface), intérieurité, appartenance, etc

Surface Implicite $F(x,y,z)=0$

Ex : plan, sphère, cylindre, tore, blobs

Terrible pour la visualisation

Pratique pour les intersections, le morphing

Surface de Subdivision

Définie par un maillage de contrôle et une subdivision récursive

Pratique pour la conception interactive

Visualisation des Courbes Paramétriques

Vue des fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

Courbe 3D paramétrique, sans t

Paramétrisation d'une courbe: nombre de solutions infini (avec vitesse (non-) constante, (dis-)continue, par longueur d'arc,...)

Courbes Paramétriques : résumé

Pourquoi des polynomiales par morceaux,
pourquoi des cubiques ?

Courbes Principales :

Splines de Hermite , splines de Bezier , splines de
Catmull-Rom ,splines naturelles cubiques , B-
Splines, NURBS

Surfaces

Construction de Courbes

Représenter $\leftrightarrow$ construire

Buts pour construire des courbes :

Courbe lisse, “élastique”

Utilise des points de contrôle

Comme les architectes de marine :

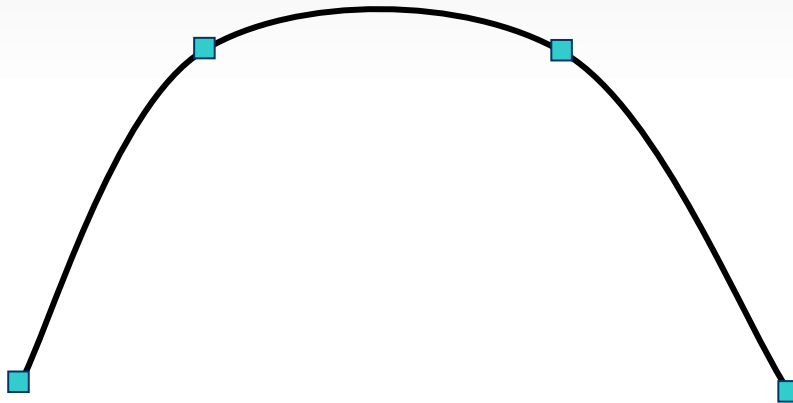
Poids ou joints pour maintenir une latte flexible (spline)

la latte passe par les joints et a une forme “lisse”

Mathématiquement ?

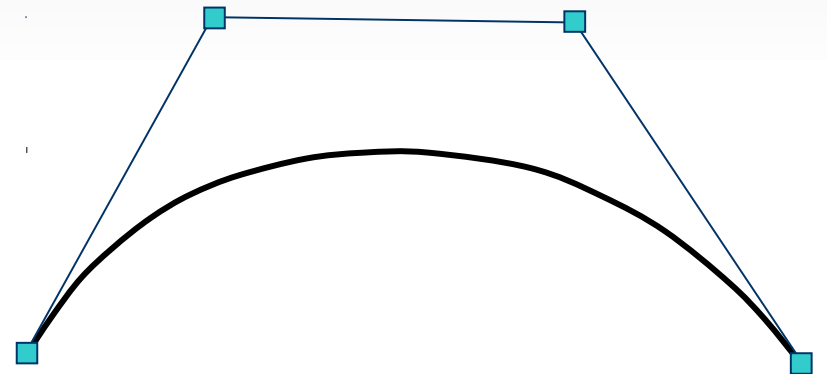
2 types de courbes

Interpolation



la courbe passe par
les points de contrôle

Approximation



la courbe approche
les points de contrôle

Avant de démarrer...

Quelques rappels mathématiques....

Soit E^3 l'espace Euclidien
Courbe paramétrique :

ex :

$$Q(t) = [x(t), y(t), z(t)] = X_0 + X_1 t + X_2 t^2 + \dots + X_n t^n$$

$$Q(t) = X_0 + X_1 t$$

combinaison barycentrique BC de E^3 : point de E^3 /

$$\left\{ \begin{array}{l} BC = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i \\ \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \end{array} \right.$$

combinaison convexe BC /

$$\alpha_i \geq 0 \quad \forall i$$

Coordonnées Barycentriques

$$\mathbf{p} = u \mathbf{a} + v \mathbf{b} + w \mathbf{c}$$

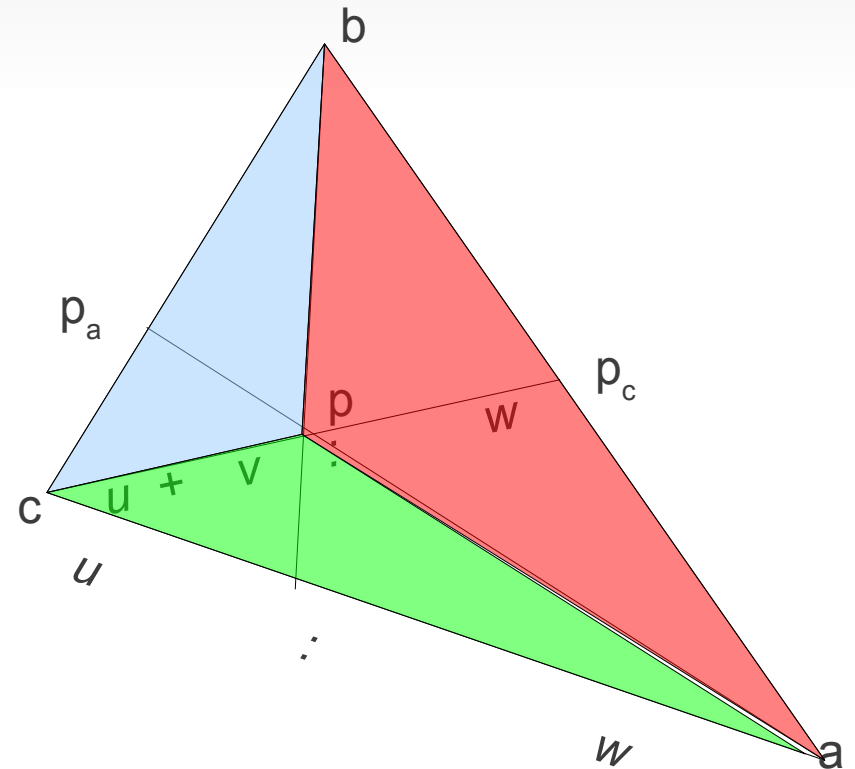
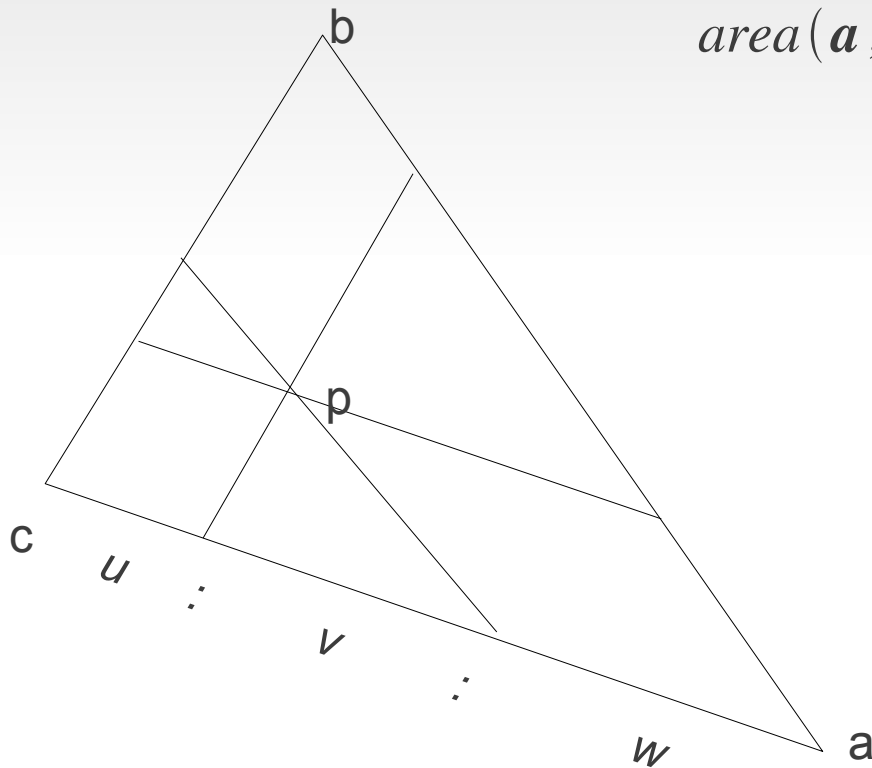
$$u + v + w = 1$$

$$u = \frac{\text{area}(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

$$v = \frac{\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{c})}{\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

$$w = \frac{\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})}{\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

$$\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

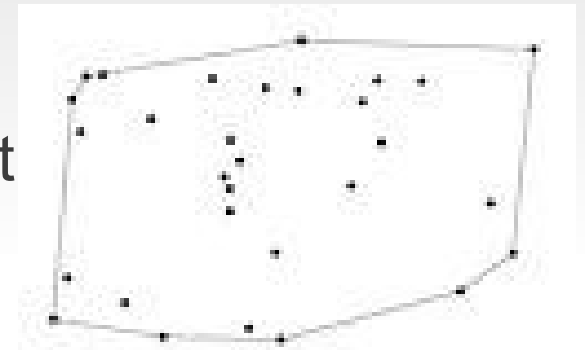


théorème de Ceva :

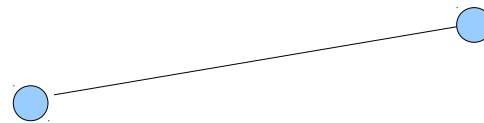
$$\text{ratio}(\mathbf{a}, \mathbf{p}_c, \mathbf{b}) \cdot \text{ratio}(\mathbf{b}, \mathbf{p}_a, \mathbf{c}) \cdot \text{ratio}(\mathbf{c}, \mathbf{p}_b, \mathbf{a}) = 1$$

Enveloppe convexe

L'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'un ensemble Γ de points de E^3 est l'enveloppe convexe de Γ



un cas particulier d'une
combinaison convexe :
l'interpolation linéaire de 2 points
distincts a et b :
 $Q(t) = (1-t) a + t b$

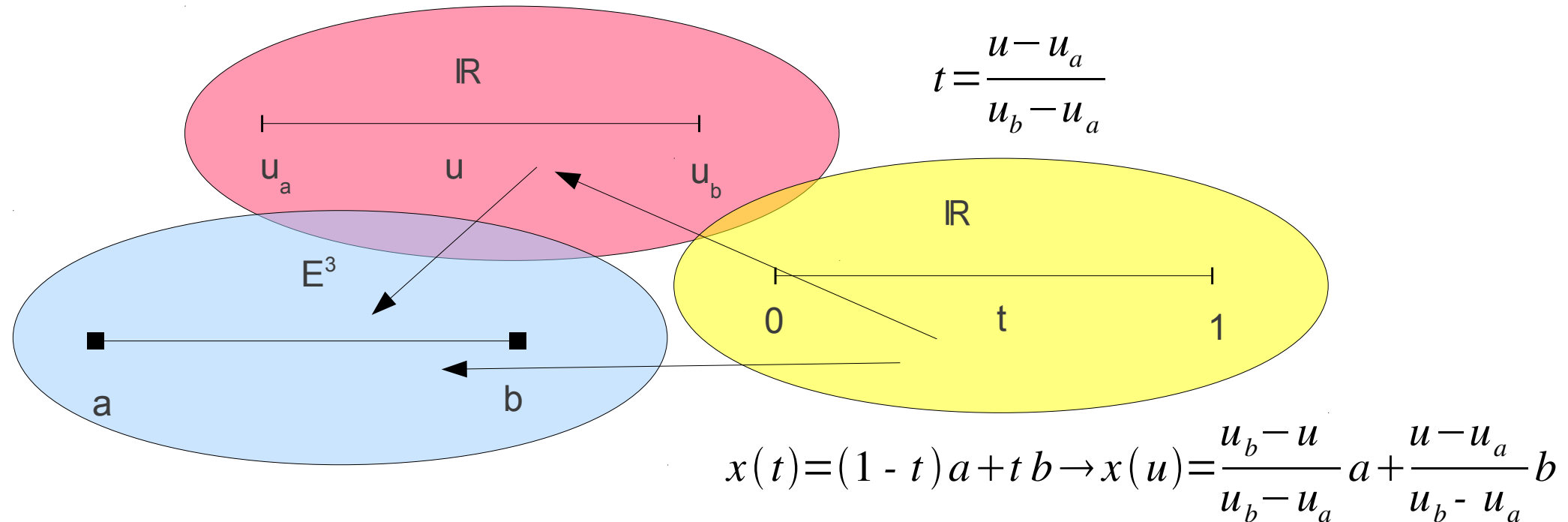


Le segment $[a, b]$ est défini par l'application affine

$$[0,1] \rightarrow E^3$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x \in E^3$$

on peut changer l'espace paramétrique sans changer $[a, b]$ dans E^3



Interpolation Polynomiale

soient $P_0, \dots, P_n$ et $t_0, \dots, t_n$ les valeurs paramétriques correspondantes

- l'Interpolation consiste à trouver une courbe $P(t)$ passant par tous les points

- Calculer un polynome satisfaisant les contraintes d'interpolation : $P(t_i) = P_i$ ($i=0..n$)

- Théorème :

- il existe un polynome unique P de degré $\leq n$ tel que $P(t_i) = P_i$ ($i=0..n$) avec P_i et t_i fixés

Interpolation Polynomiale

un polynome de degré n interpole une courbe en $(n+1)$ points

Ex : courbe 2^e degré interpole 3 points

$x(t) = at^2 + bt + c$ en (t_1, x_1) , (t_2, x_2) , (t_3, x_3)

3 équations linéaires avec 3 inconnues pour trouver a, b, c

Interpolation de Lagrange

courbe « sinueuse », globale, instable
=> polynomes de bas degré et courbe lisse

simuler un fil élastique (thin plate)

Interpolation de Lagrange

Données :

$n + 1$ points (avec x_i distincts 2 à 2).

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$$

Polynomes de Lagrange

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \dots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

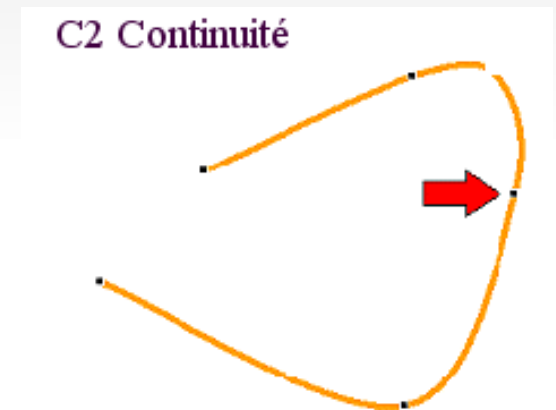
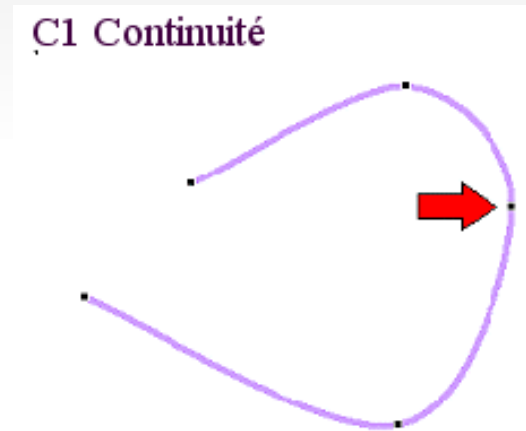
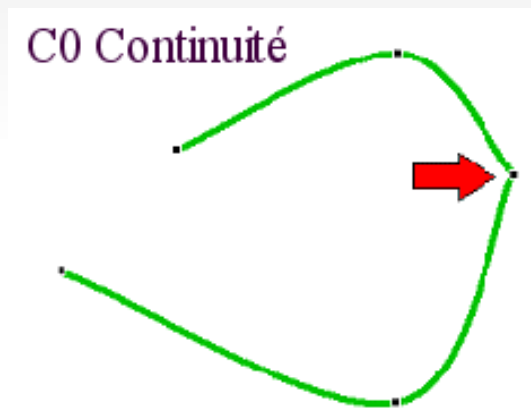
Deux propriétés : $\forall j \quad \text{degre}(L_j) = n$

$$L_j(x_i) = \delta_{j,i} \quad \text{ie} \quad L_j(x_j) = 1 \wedge L_j(x_i) = 0 \quad \text{if} \quad j \neq i$$

$$L(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j(x) \quad \text{Est l'unique polynome de degré } n \text{ vérifiant} \quad L(x_i) = y_i \quad \forall i$$

Polynômes par morceaux

Spline : plusieurs morceaux combinés
combinaison « correcte »



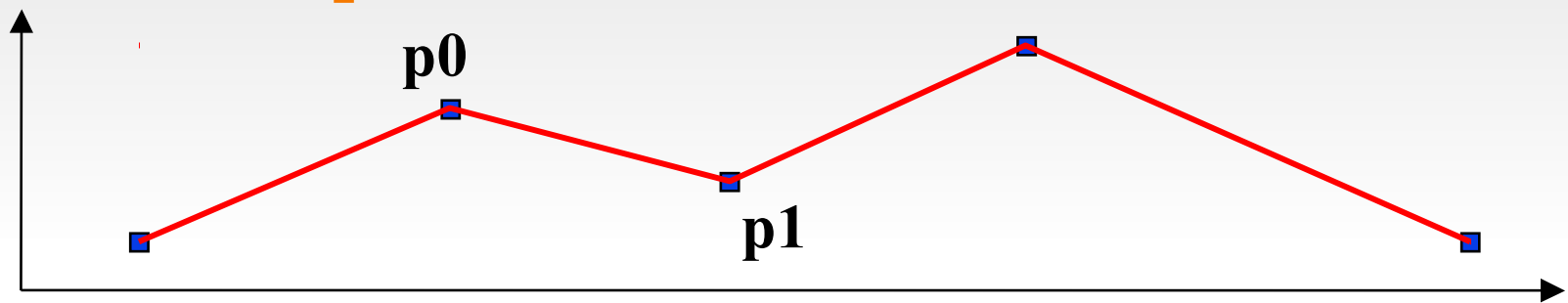
Position et alignement des tangentes

Position, tangence et continuité de

Position continuité

Polynomes linéaires par morceaux

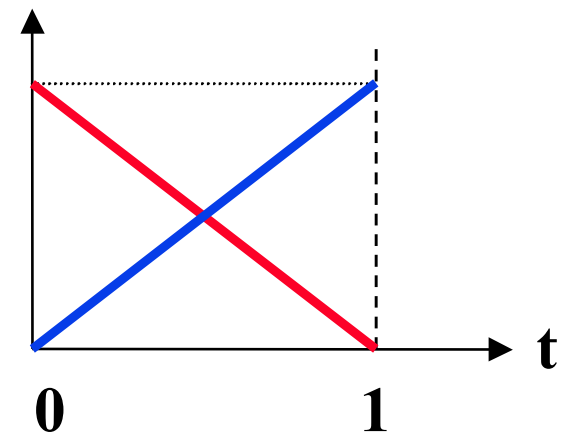
Interpolation Linéaire



$$p(t) = (1-t)p_0 + tp_1$$

2 fonctions de base

$$p(t) = \begin{pmatrix} t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^1 B_i^1(t) p_i$$

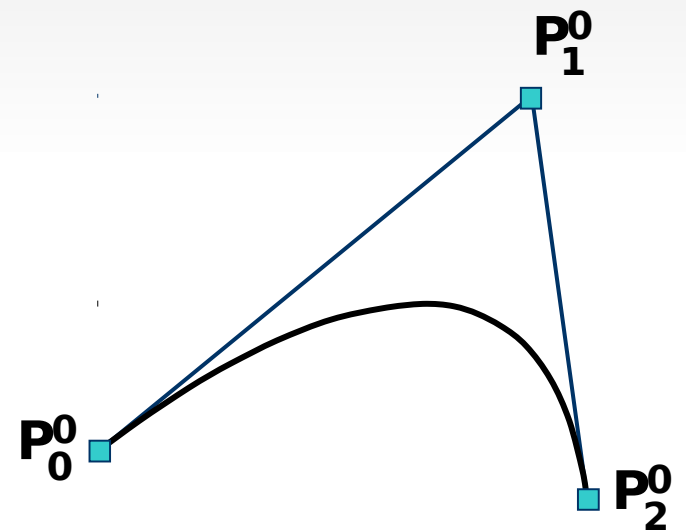


Courbe de Bézier

$$P(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{1} \\ \boxed{-2} & \boxed{2} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} \boxed{t^2 - 2t + 1} \\ \boxed{-2t^2 + 2t} \\ \boxed{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{B_0^2(t)} \\ \boxed{B_1^2(t)} \\ \boxed{B_2^2(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \boxed{B_i^n(t)} P_i^0$$



Polynomes de Bernstein

Degré n=2

Courbe de Bézier

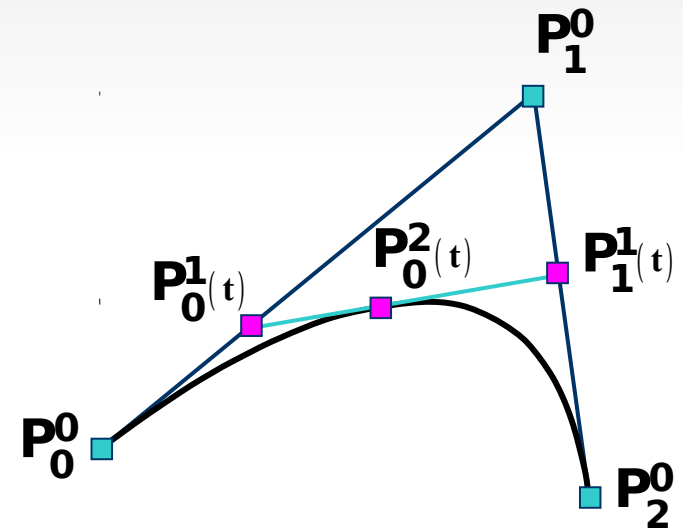
$$P_0^1(t) = (1-t)P_0^0 + tP_1^0$$

$$P_1^1(t) = (1-t)P_1^0 + tP_2^0$$

$$P_0^2(t) = (1-t)P_0^1 + tP_1^1$$

$$P_0^2(t) = (1-t)((1-t)P_0^0 + tP_1^0) + t((1-t)P_1^0 + tP_2^0)$$

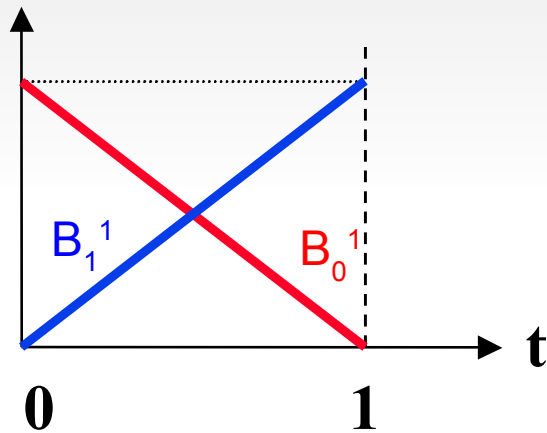
$$\begin{aligned} P_0^2(t) &= (1-t)^2 P_0^0 + 2t(1-t)P_1^0 + t^2 P_2^0 \\ &= B_0^2 P_0^0 + B_1^2 P_1^0 + B_2^2 P_2^0 = \sum_{i=0}^n B_i^n P_i^0 \end{aligned}$$



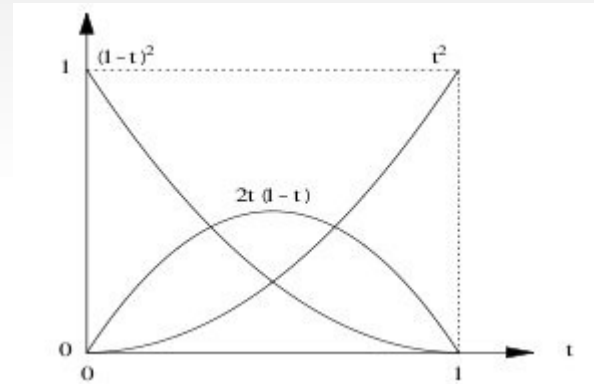
degré $n = 2$

Fonctions de mélange de Bézier

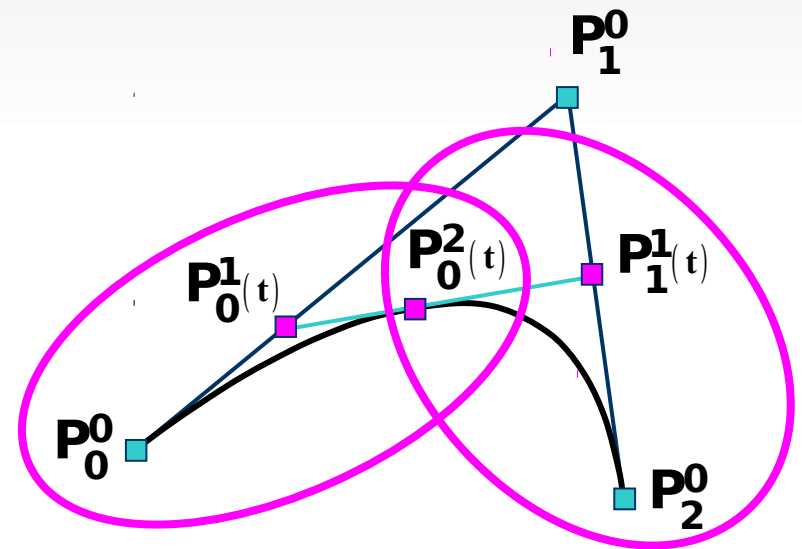
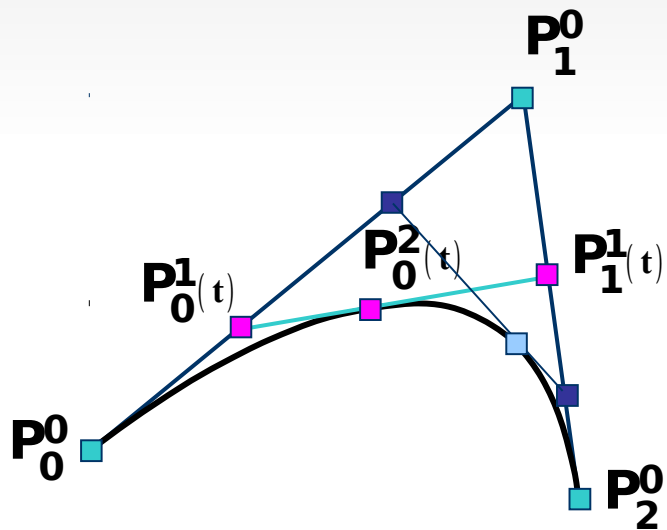
Degré 1



Degré 2



Courbe de Bézier

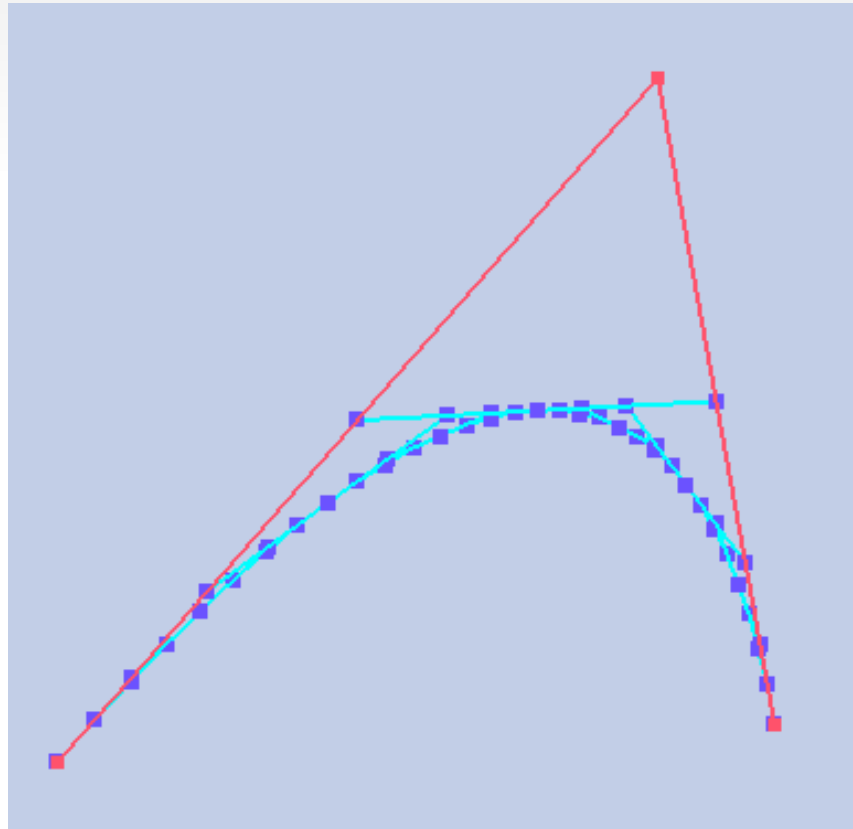


Subdivision des courbes de Bézier



Chaque moitié est une courbe de Bézier
Algorithme général de de Casteljau

Courbe de Bézier

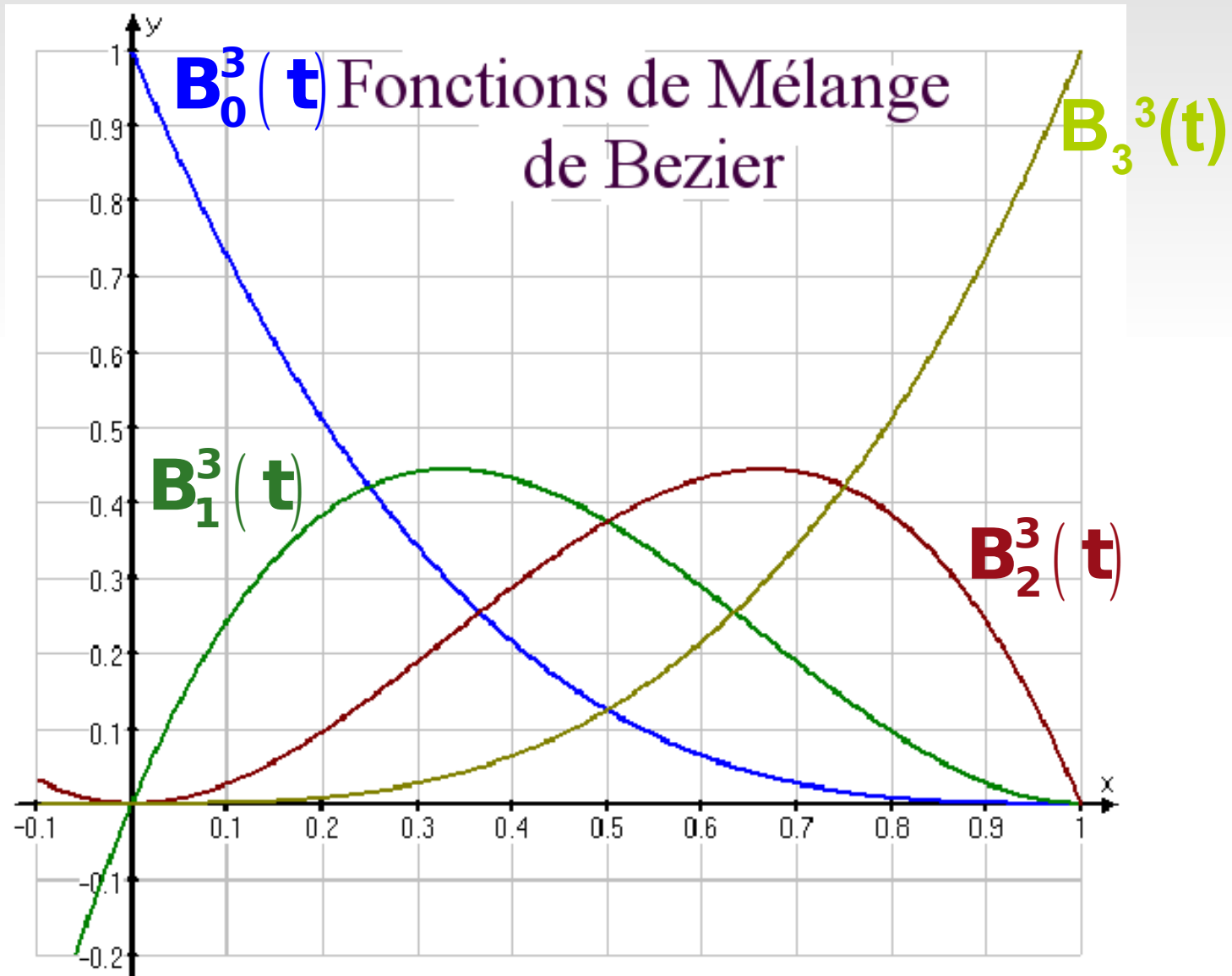


Courbe de Bézier Cubique

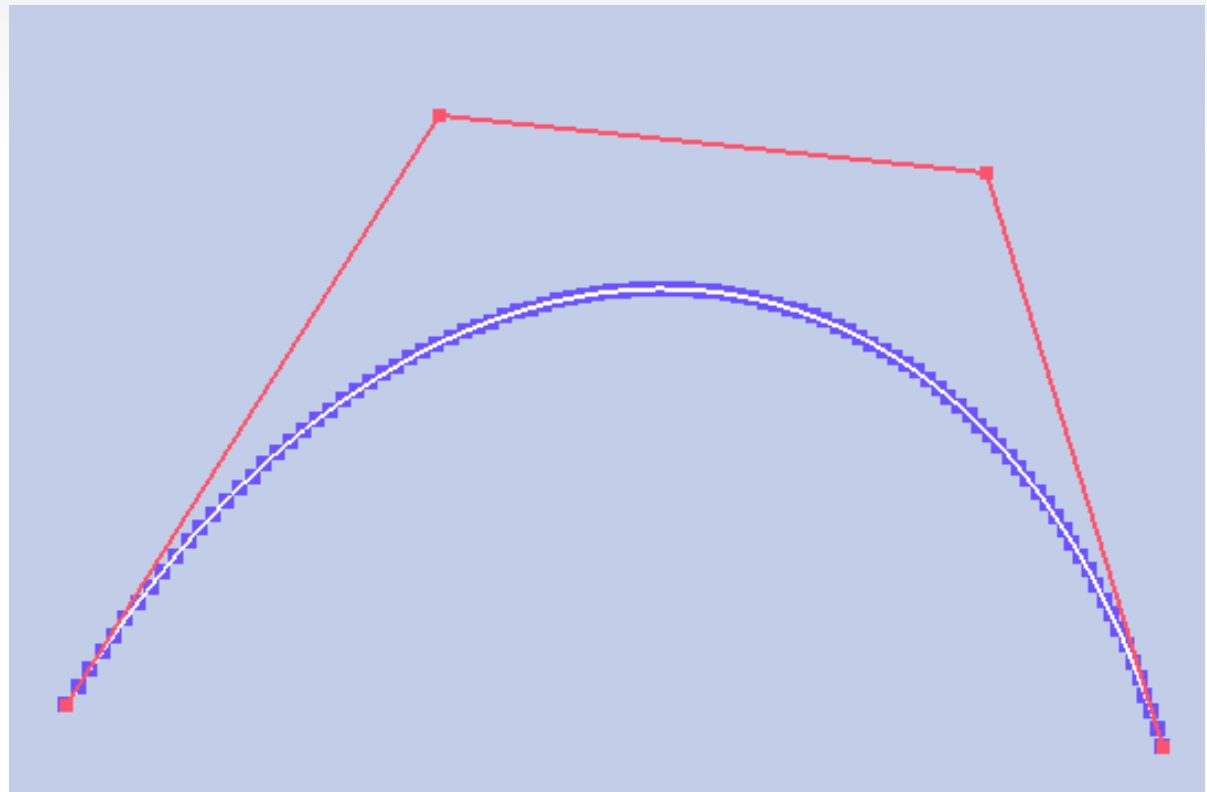
$$P(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \end{pmatrix}$$

Fonctions de mélange de Bézier

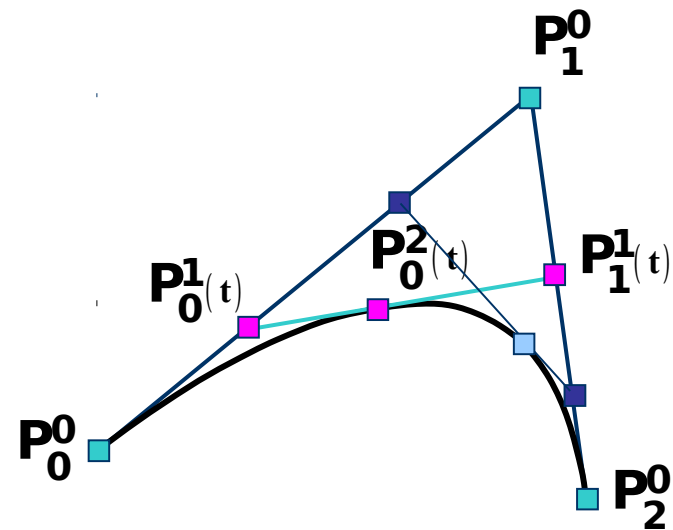


Courbe de Bézier



De Casteljau

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i^r(t) = (1-t) P_i^{r-1}(t) + t P_{i+1}^{r-1}(t) \\ r = 1, \dots, n \quad i = 0, \dots, n-r \quad t \in \mathbb{R} \\ P_i^0(t) = P_i \end{array} \right.$$



Polynomes de Bernstein

- Courbe de Bezier :

$$C(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

où les $B_i^n(t)$ sont les polynomes de Bernstein de degré n
et les P_i les points de contrôle

- Polynomes de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

$$\text{avec } \binom{n}{i} = C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Propriétés des Polynômes de Bernstein

$$\left\{ \begin{array}{l} B_i^n(t) = (1-t)B_{i-1}^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \\ B_0^n(t) = 1 \wedge B_j^n(t) = 0 \text{ if } j \notin \{0, \dots, n\} \end{array} \right.$$

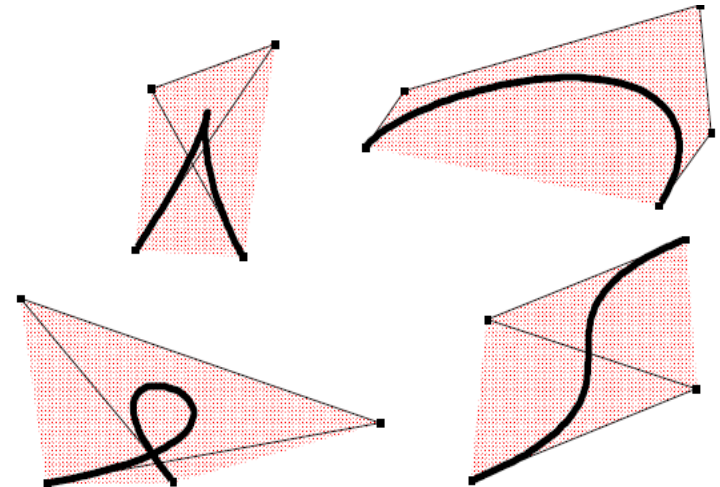
Extrémités et enveloppe Convexe

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1 \wedge B_i^n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1] \\ B_0^n(0) = P_0 \wedge B_n^n(1) = P_n \end{array} \right.$$

Invariance Affine

soit $f(x) = A \cdot x + b$ une transformation affine

$$f(B_n(t)) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) f(P_i)$$



Propriétés des Polynômes de Bernstein

Symétrie

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t) \rightarrow \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i = \sum_{i=n}^0 B_{n-i}^n(1-t) P_i \quad \forall t \in [0,1]$$

Invariance Affine des paramètres

$$\text{soit } t = \frac{u-a}{b-a} \quad t \in [0,1] \wedge u \in [a,b] \quad B_n(t) \text{ est la même courbe que } B_n(u)$$

Propriétés des Polynômes de Bernstein

Dérivées

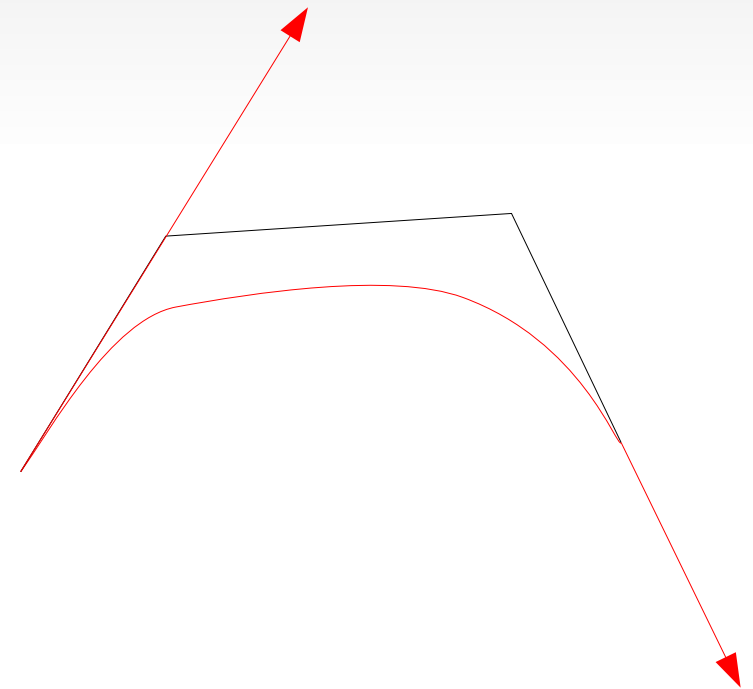
première dérivée

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta P_i B_i^{n-1}(t) \quad \text{with } \Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

$$\leftarrow \frac{dB_i^n(t)}{dt} = n (B_{i-1}^n(t) - B_i^n(t))$$

Vecteurs Tangents

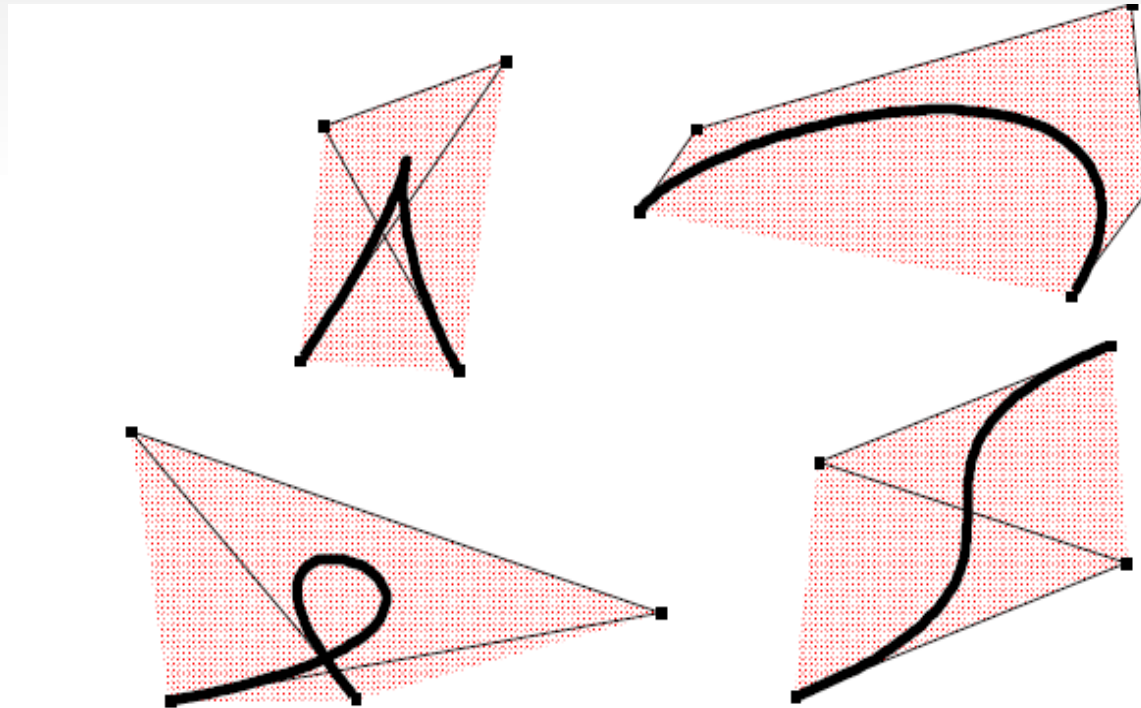
$$\frac{dB_n(0)}{dt} = n \Delta P_0 \quad \wedge \quad \frac{dB_n(1)}{dt} = n \Delta P_{n-1}$$



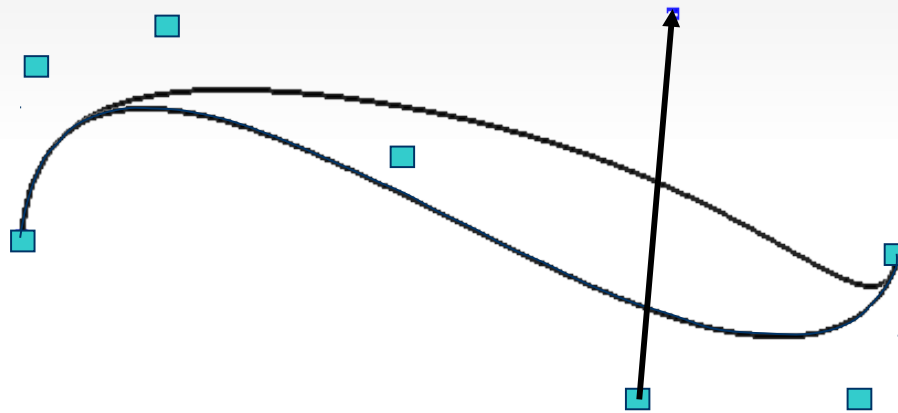
Forme Générale

$$\frac{d^k B_n(t)}{d^k t} = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k P_i B_i^{n-k}(t) \quad \text{with } \Delta^k P_i = \Delta^{k-1} P_{i+1} - \Delta^{k-1} P_i = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} P_{i+j}$$

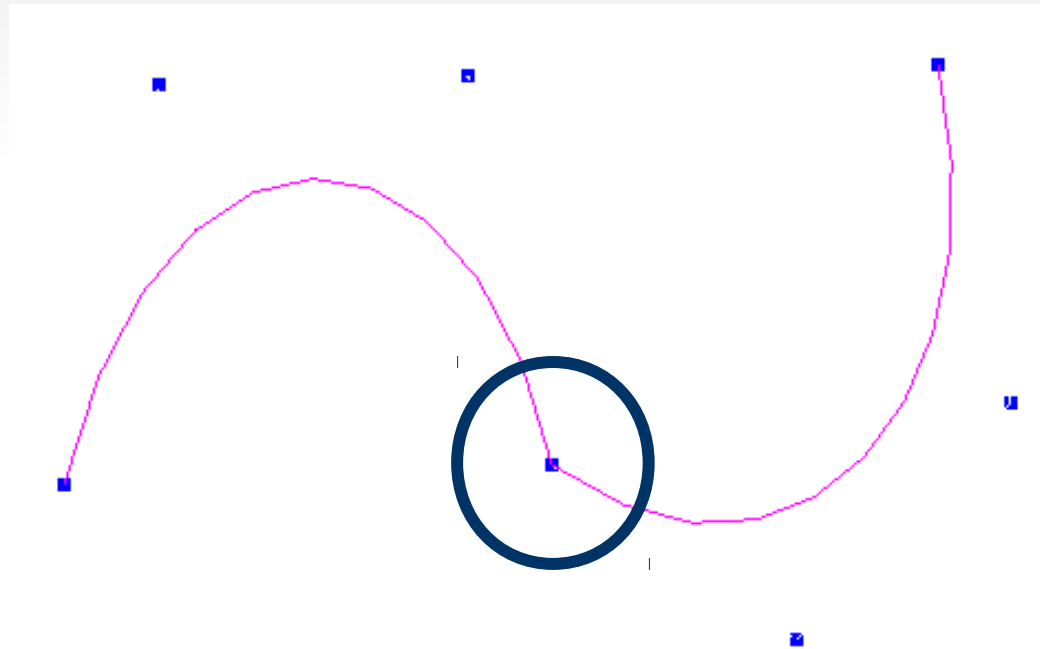
Courbe de Bézier



Courbe de Bézier



Courbe de Bézier par morceaux



D'autres cubiques....

Hermite
CatmullRom

Hermite

Pourquoi celles-là ? Elles vérifient :

$$p(0) = p_1$$

$$p(1) = p_2$$

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=0} = \nabla p_1$$

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=1} = \nabla p_2$$

Interpole les extrémités et les tangentes aux extrémités

Graphiquement

Spline de Hermite Cubique



Spécification de Hermite

Courbes Cubiques

Polynome Cubique

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = t \cdot a$$

$$\text{avec } t = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \text{ et } a = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Calcul des Splines de Hermite

4 contraintes : positions et tangentes aux extrémités de $[0,1]$

$$p(0) = p_1$$

$$p(1) = p_2$$

$$p'(0) = p'_1$$

$$p'(1) = p'_2$$

Hyp : forme cubique : $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

4 inconnues : a, b, c, d

Calcul des Splines de Hermite

- comme $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$
$$p'(t) = \frac{dp(t)}{dt} = 3at + 2bt + c$$
- Les 4 contraintes donnent 4 équations linéaires

$$p(0) = p_1 = d$$

$$p(1) = p_2 = a + b + c + d$$

$$p'(0) = p_1' = c$$

$$p'(1) = p_2' = 3a + 2b + c$$

- Résoudre en a, b, c, d :

$$a = 2p_1 - 2p_2 + p_1' + p_2', \quad b = -3p_1 + 3p_2 - 2p_1' - p_2', \quad c = p_1', \quad d = p_1$$

- Form matricielle ...

Splines de Hermite : forme matricielle

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Vecteur de Contrôle Base coefficients
spline



Résoudre les coefficients spline

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \end{bmatrix}$$

Coefficients Spline Base Vecteur de Contrôle

Equation des Splines de Hermite Cubiques

$$[p] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \end{bmatrix} \quad p(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ p_2 \\ \nabla p_1 \\ \nabla p_2 \end{pmatrix}$$

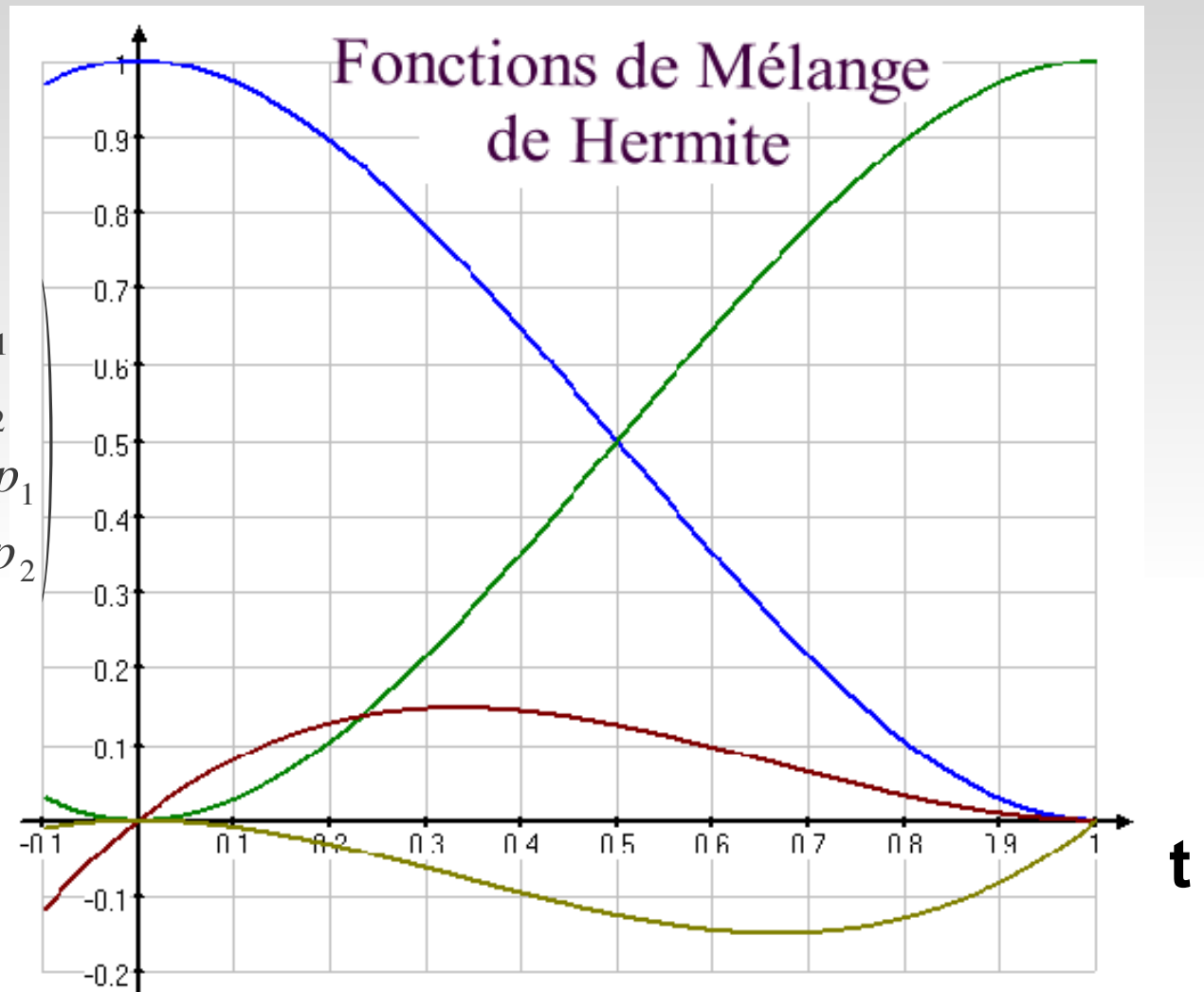
Matrice de Base

Points de Contrôle

4 fonctions de base des cubiques de Hermite

$$p(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ p_2 \\ \nabla p_1 \\ \nabla p_2 \end{pmatrix}$$

↑
4 fonctions de base



ne de Hermite est une combinaison linéaire (un mélange) de ces 4 f

Retour aux Courbes de Bézier

Une sorte de courbe de Hermite

4 points de contrôle : P_1 et P_4 aux extrémités,
 P_2 et P_3 contrôlent les tangentes aux
extrémités

$$p(0) = P_1, \quad p(1) = P_4,$$

$$p'(0) = 3(P_2 - P_1), \quad p'(1) = 3(P_4 - P_3)$$

Matrice de Bézier ~ Matrice de Hermite

Propriété de l'enveloppe Convexe

de Hermite à Bézier

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \frac{dp_1}{dt} & \frac{dp_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$p(0) = P_0$$

$$p(1) = P_3$$

$$p'(0) = 3(P_1 - P_0)$$

$$p'(1) = 3(P_3 - P_2)$$

cteur de Contrôle Bézier Vers Hermite Contrôle de Bézier

Bézier : forme matricielle

$$[P(t)] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Base de Hermite Bézier Vecteur de Contrôle de Bézier

$$[P(t)] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Fonctions de Base de Bézier

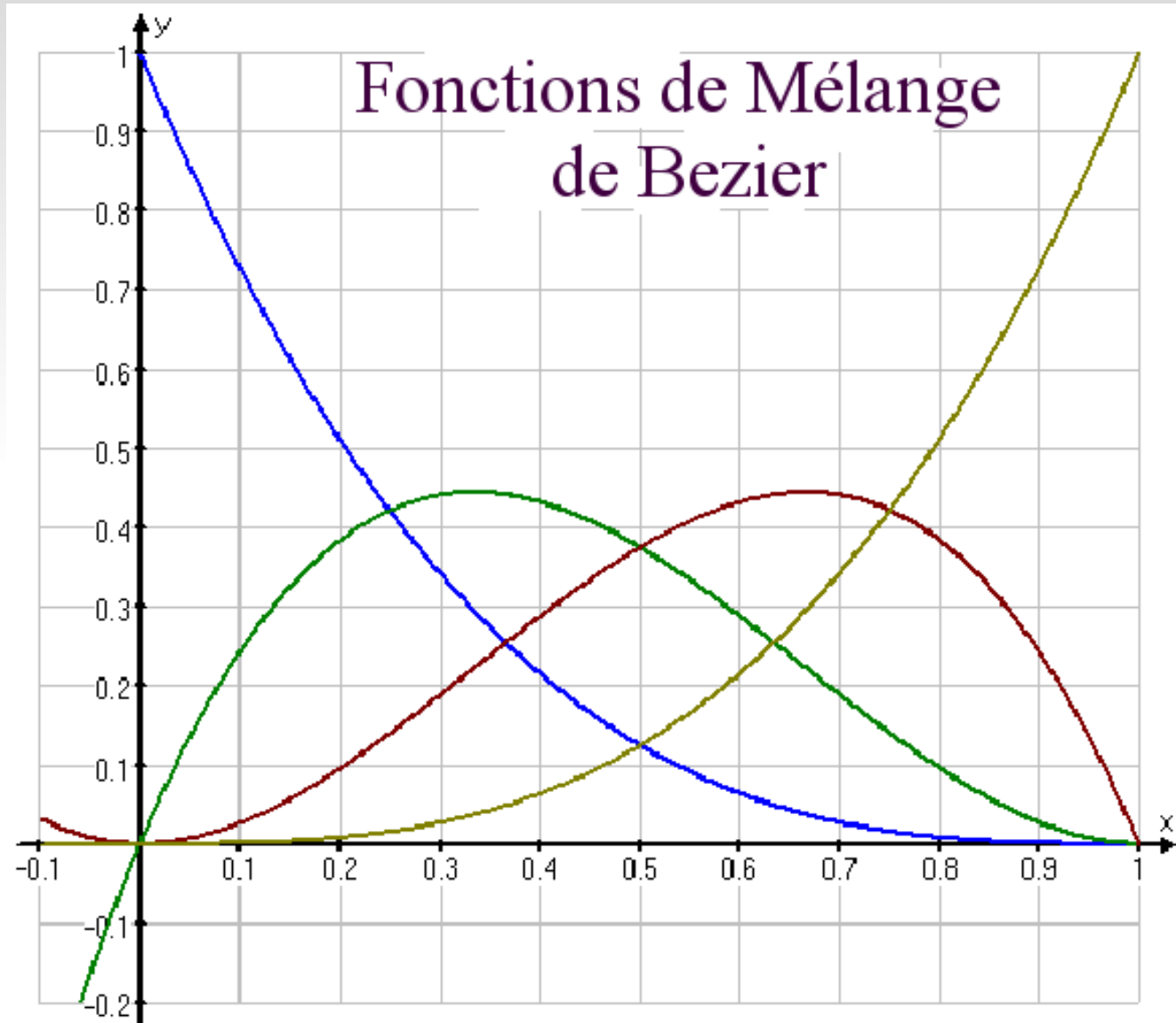
$$p(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Polynomes de Bernstein de degré 3

Positifs sur $[0,1]$, somme à 1

Propriété : courbe dans l'enveloppe convexe des points de contrôle

Fonctions de mélange de Bézier



Composition de Splines de Hermite

Spline de Hermite composée

Chaque morceau est une cubique de Hermite

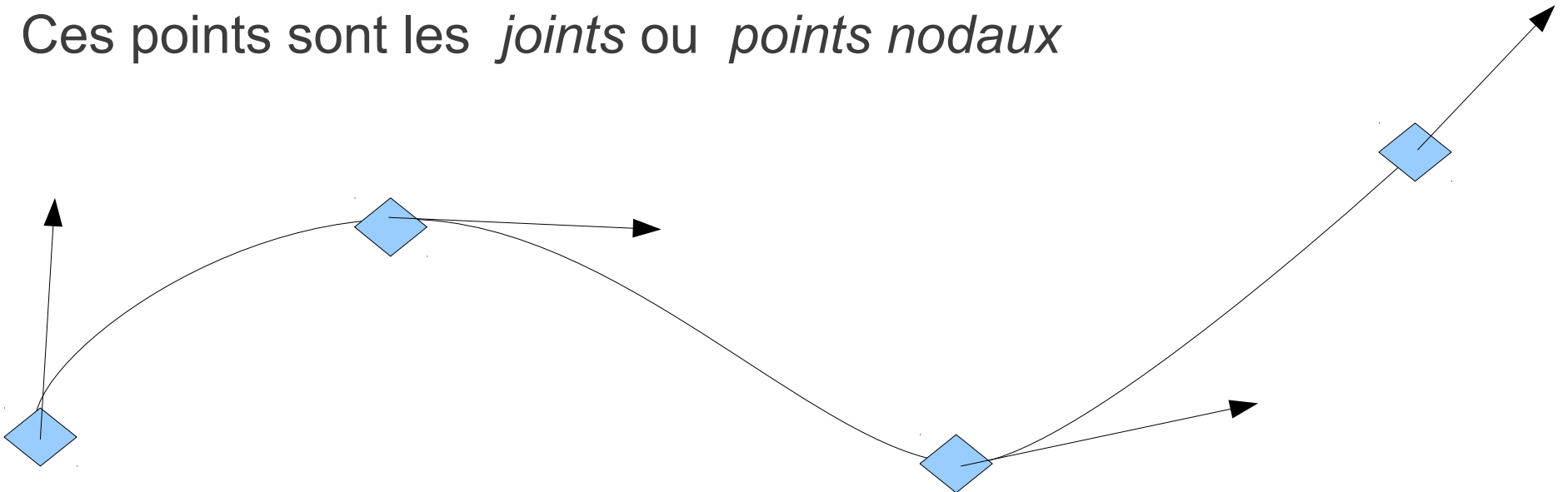
Spécifier la position et la tangente à chaque joint

Les morceaux interpolent les positions et les tangentes

Continuité C^1

A partir d'une liste de positions et tangentes, construire une cubique par morceaux qui passe à chaque point

Ces points sont les *joints* ou *points nodaux*



Splines de Catmull-Rom

Avec Hermite ou Bézier, difficile de composer des courbes assurant la continuité C^1 ou G^1

Catmull-Rom : splines cubiques d'interpolation C^1 continues

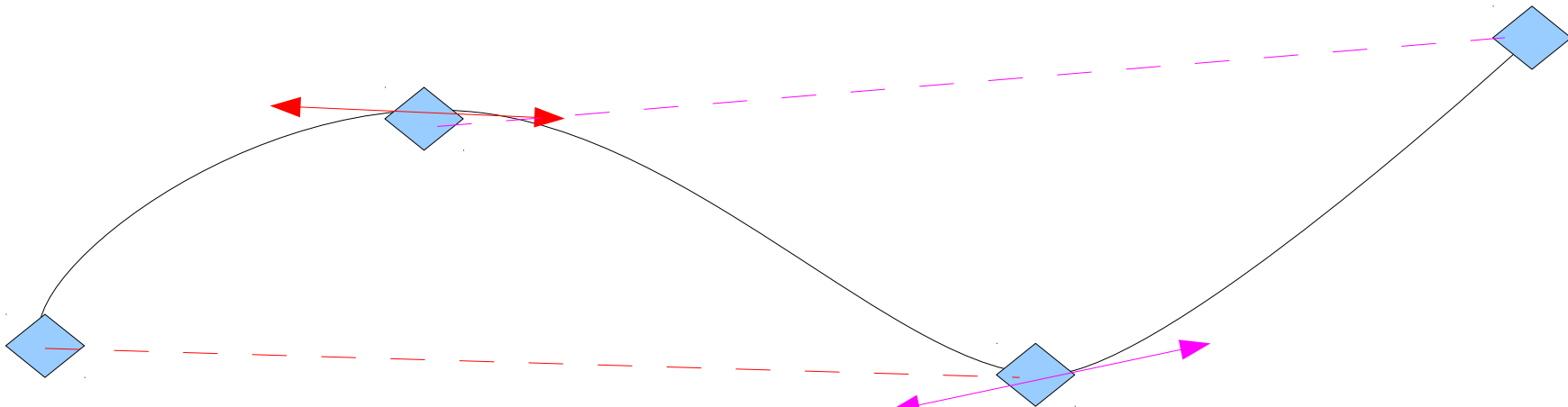
Données :

$(n+1)$ points de contrôle $P_0, \dots, P_n$

Tangentes à chaque P_i : $s(P_{i+1} - P_{i-1})$ $i=2..n-1$

« fantômes » aux extrémités

Splines de Hermite “en série”. Chaque morceau est déterminé par 4 points



Matrice de Catmull-Rom

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Coefficients Spine de Catmull-Rom de Contrôle

Calcul comme pour Hermite et Bezier

S : paramètre de tension (souvent $s=1/2$)

Splines C^2 ?

Polynomes de plus haut degré
Coût en calcul + élevé
Instable

Contrôle Global

Cubiques Naturelles

Approximation

B-Splines Cubiques

Splines naturelles Cubiques

Continuité C^2

Calcul des coefficients pour résoudre une équation cubique

Calcul global (système linéaire tridiagonal)

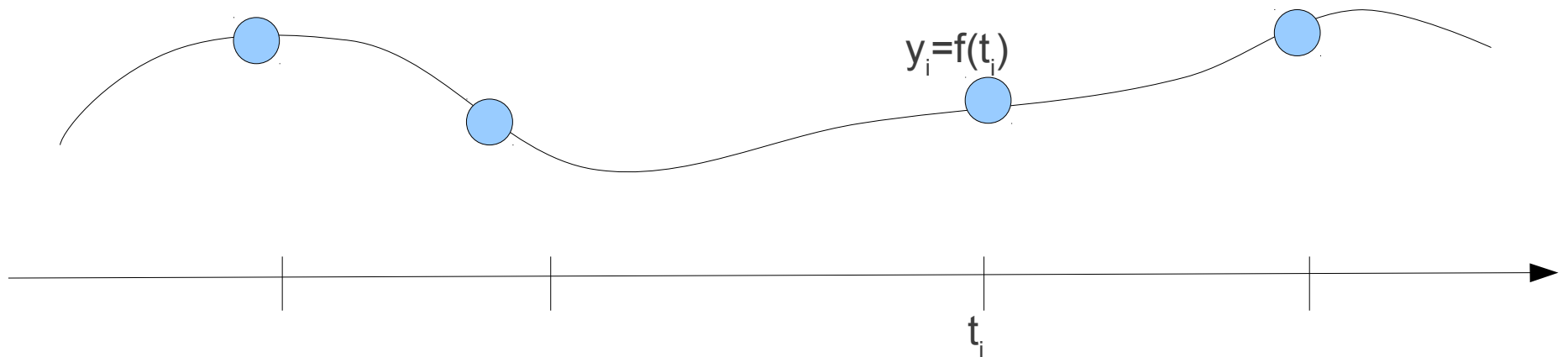
Splines Naturelles : dérivées secondes arbitrairement mises à 0 aux extrémités

Cubic natural Splines

Data : $n+1$ points $P_i(t_i, y_i)$ $i=0, \dots, n$.

Find $y=f(t)$ / $y_i=f(t_i)$ with derivatives $f'(t)$ and $f''(t)$ continuous over $[t_0, t_n]$.

Points t_i are called knots and $h_i=t_{i+1}-t_i$ is the step (not necessarily constant but positive: $t_0 < t_1 < \dots < t_n$)



Cubic natural Splines

$\Leftrightarrow$ find n functions $S_i(t)$ $i=0,1,\dots,n-1$ such that:

(t_i, y_i) verify the 2 consecutive functions they belong to, except points (t_0, y_0) and (t_n, y_n) which belong only to the first and last function.

$$\begin{cases} S_0(x_0) = f(x_0) = y_0 \\ S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i) = f(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ S_{n-1}(x_n) = f(x_n) = y_n \end{cases} \quad (1)$$

First derivatives of 2 consecutive functions are equal at joints (they share the same tangent).

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (2)$$

Second derivatives of 2 consecutive functions are equal at joints (they have the same concavity)

$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (3)$$

Cubic natural Splines

$S_i(t)$ are polynomials of degree ≤ 3 , find for each 4 coefficients $\Rightarrow$ total : $4n$ numbers to be determined

2 conditions are missing :
impose 2 conditions :

$2n$ conditions (1)

+ $(n-1)$ conditions (2)

+ $(n-1)$ conditions (3)

= $4n-2$ linear conditions for the $S_i(t)$ coefficients.

$$S'_0(t_0)=f'(t_0) \text{ and } S'_{n-1}(t_n)=f'(t_n)$$

or

$$S'_0(t_0)=f'(t_0) \text{ and } S''_0(t_0)=f''(t_0)$$

or

$$S''_0(t_0)=S''_{n-1}(t_n)=0 \text{ (natural splines)}$$

or

.....

Cubic natural Splines

$S_i(t)$ has degree ≤ 3 , $S''_i(t)$ is linear $\Rightarrow$ linear combination of $f''_i = f''(t_i)$ and $f''_{i+1} = f''(t_{i+1})$

$$S''_i(t) = \frac{t_{i+1} - t}{h_i} f''_i + \frac{t - t_i}{h_i} f''_{i+1}$$

Two successive integrations give:

$$S_i = y_i \frac{t_{i+1} - t}{h_i} + y_{i+1} \frac{t - t_i}{h_i} - \frac{h_i^2}{6} f''_i \left[\frac{t_{i+1} - t}{h_i} - \left(\frac{t_{i+1} - t}{h_i} \right)^3 \right] - \frac{h_i^2}{6} f''_{i+1} \left[\frac{t - t_i}{h_i} - \left(\frac{t - t_i}{h_i} \right)^3 \right]$$

Deriving :

$$S'_i(t_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (f''_{i+1} + 2f''_i)$$

$= S'_{i-1}(t_i)$ same tangent vector at joints

$$S'_{i-1}(t_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6} (f''_i + 2f''_{i-1})$$

gives $n-1$ equations. Not sufficient to determine $n+1$ $f''_i \Rightarrow$ add $f''_0 = f''_N = 0$

Interpolation, Continuité, Contrôle local

Hermite/Catmull-Rom/Bézier

Interpolant

CTRL Local

$<C^2$

Splines Naturelles

Interpolant

CTRL Global

C^2

Résumé

On n'a pas les 3 propriétés...

B-Splines

Approximation (pas d'interpolation)

la courbe passe « près » des points de contrôle

Propriété d'enveloppe Convexe

Continuité C^2 , contrôle local

Base des B-Splines cubiques uniformes

$$P_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

Comparaison des splines cubiques

Type	Points de contrôle 2 + 2 tgtes	Continuité	Interpolation
Hermite	4	C1	O
Bézier	4 partagés	C1	O
Catmull-Rom	n partagés	C1	O
Naturelles	4 partagés	C2	O
B-Splines		C2	N

B-Splines Non Uniformes

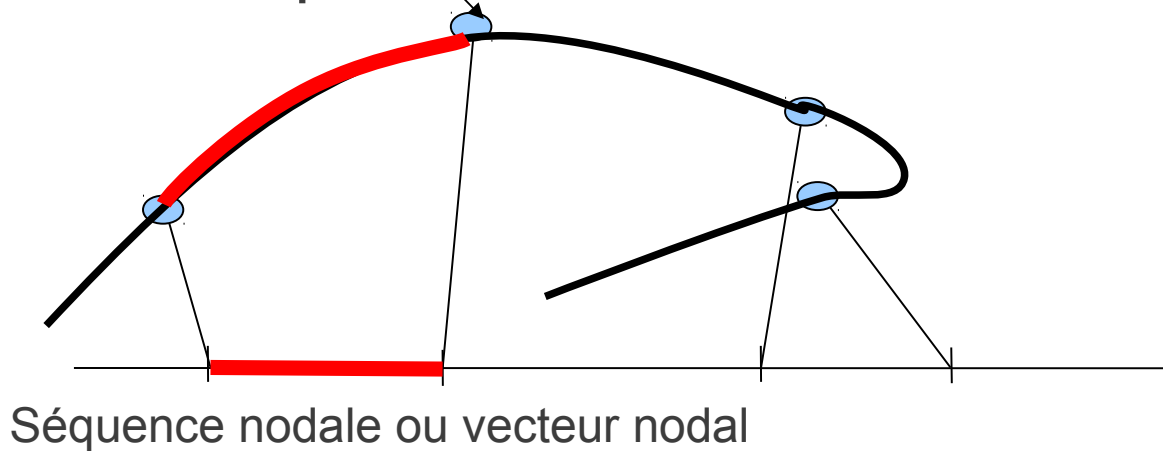
Séquence non uniforme

Différentes fonctions de base pour chaque intervalle non

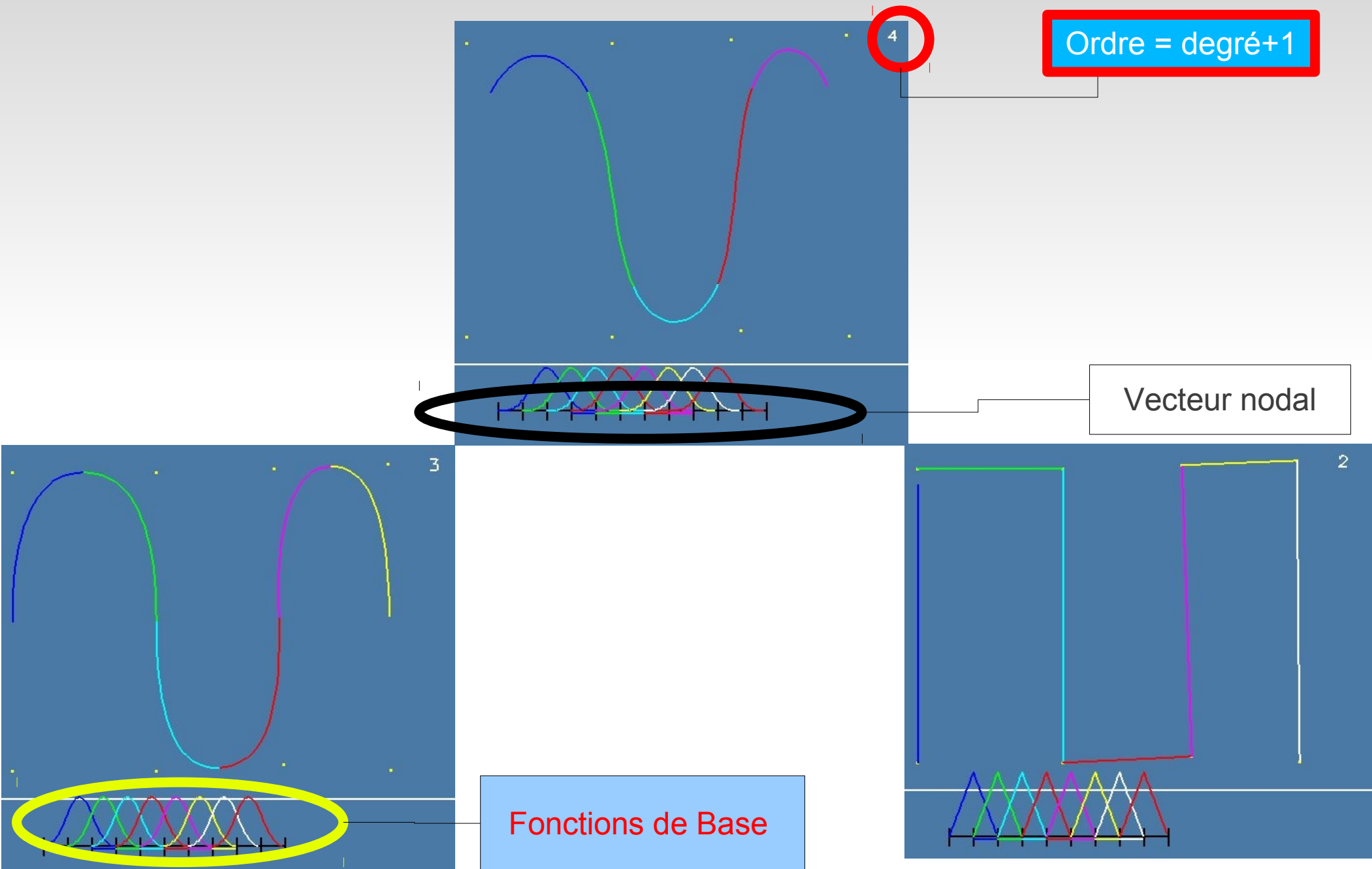
joint

Contrôle local

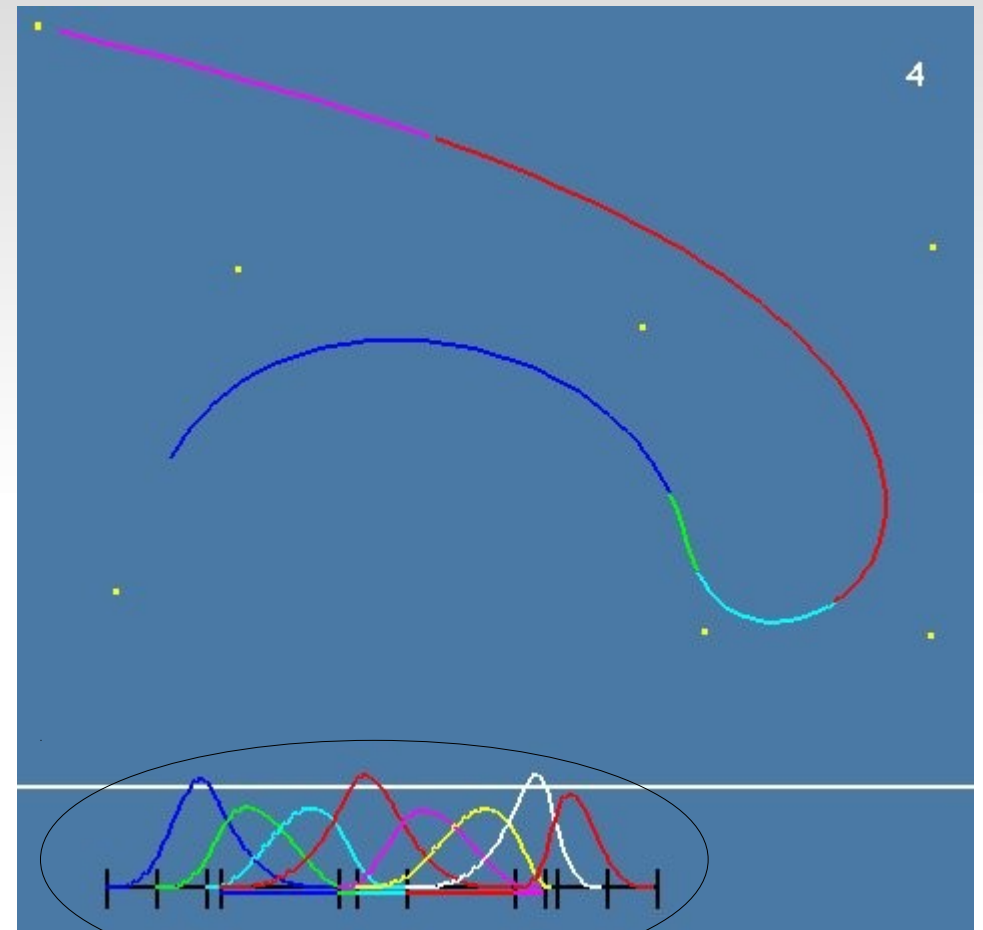
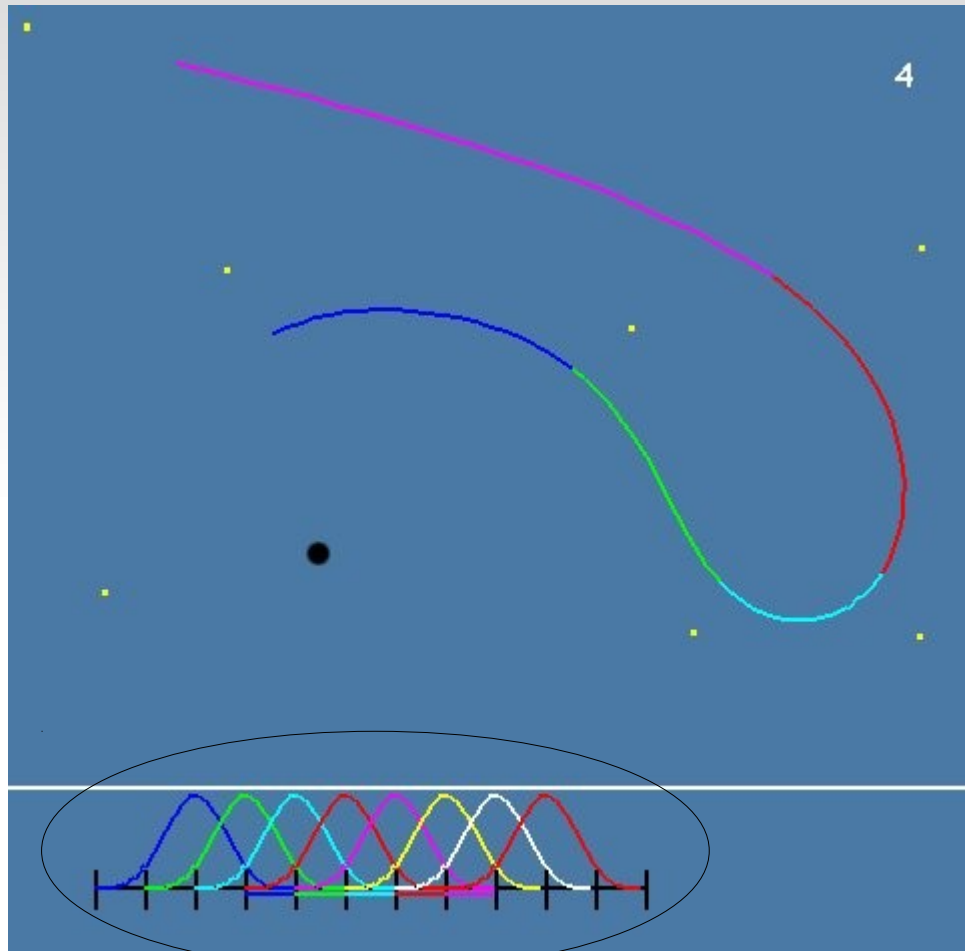
possible réduction de la continuité



Courbes B-Spline : exemples

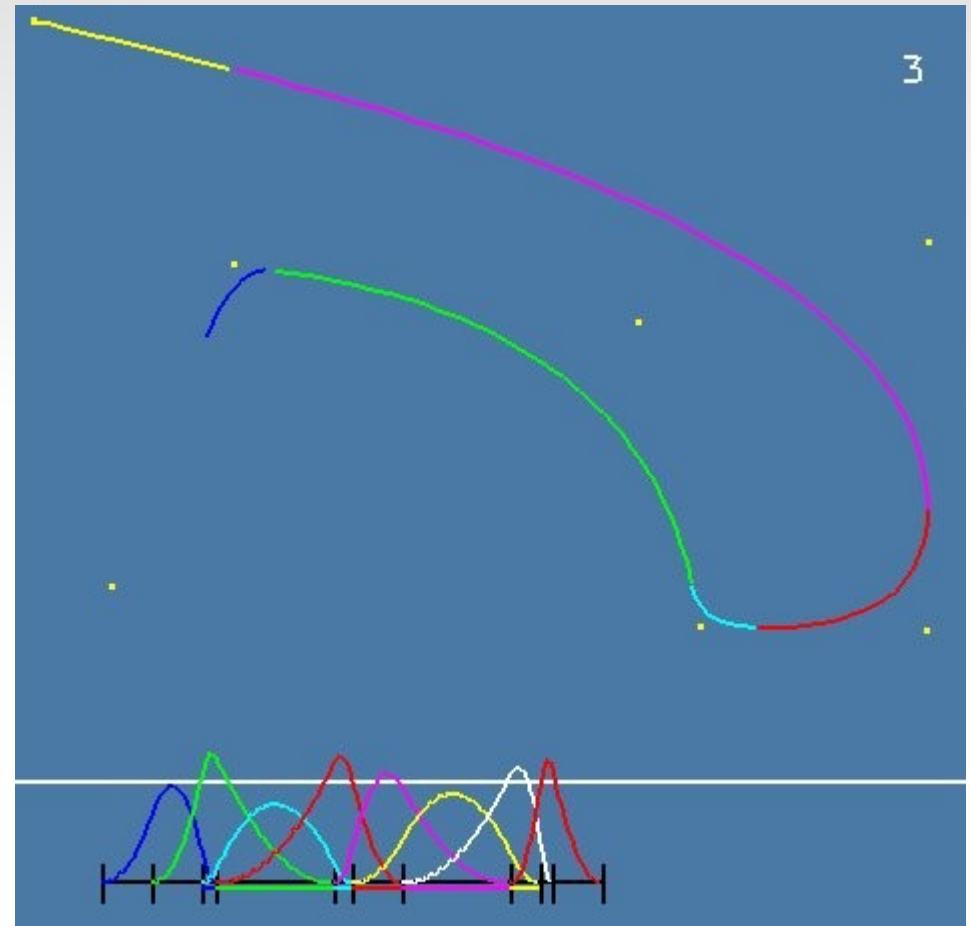
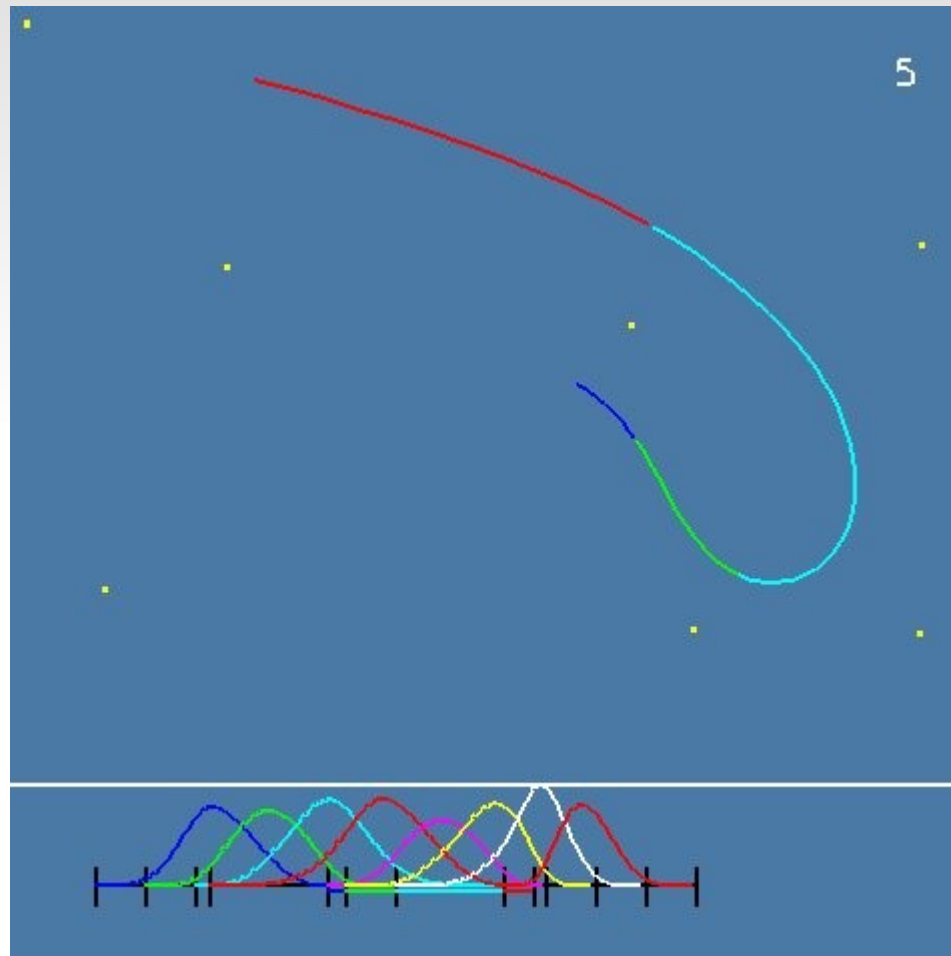


Courbes B-Spline : exemples



Points de Contrôle et ordre inchangés. Le vecteur nodal change

Courbes B-Spline : exemples



points de Contrôle et vecteur nodal inchangés. L'Ordre change

Courbes B-spline

Courbe Globale : $t \in [t_0, t_{m+k}]$

$$C(t) = \sum_{i=0}^m P_i B_{i,k}(t)$$

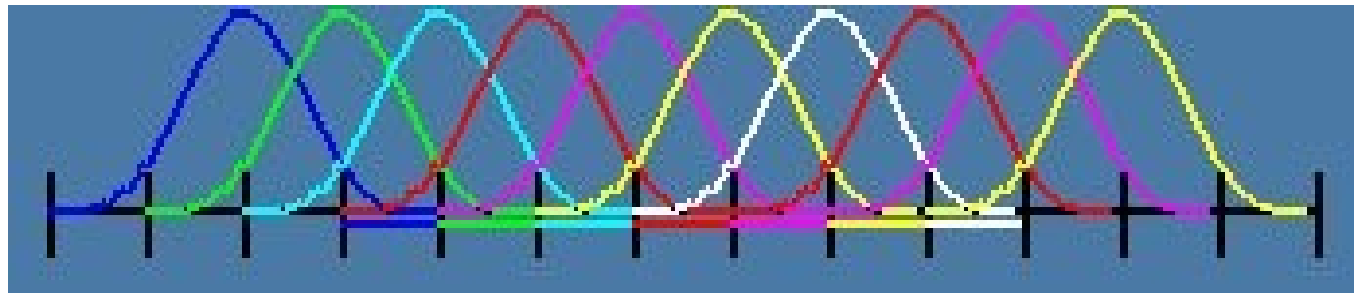
Union de $m-k+2$ courbes

$$C(t) = \coprod_{j=k-1}^{j=m} C_j(t)$$

chaque courbe C_j est d'ordre k

$$C(t) = \coprod_{j=k-1}^{j=m} \left(\sum_{i=-(k-1)}^{i=0} P_{i+j} B_{i+j,k}(t) \right)$$

Exemple : ordre $k=4$, 10 points de contrôle (de 0 à $m=9$), $m+k=13$ noeuds, $m-k+2=7$ morceaux de courbe



Courbes B-splines

Equation de la Courbe : $C(t) = \sum_{i=0}^m P_i B_{i,k}(t) \quad t \in [t_0, t_{m+k}], \quad i \in \{0, m\}$

Vecteur nodal : $T = \{t_i; 0 \leq i \leq m+k \wedge t_0 \leq t_i \leq t_{m+k}\}$

Calcul par Récurrence

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B_{i,r}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+r-1} - t_i} B_{i,r-1}(t) + \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_{i+1}} B_{i+1,r-1}(t) \quad \text{pour } t \in [2, k]$$

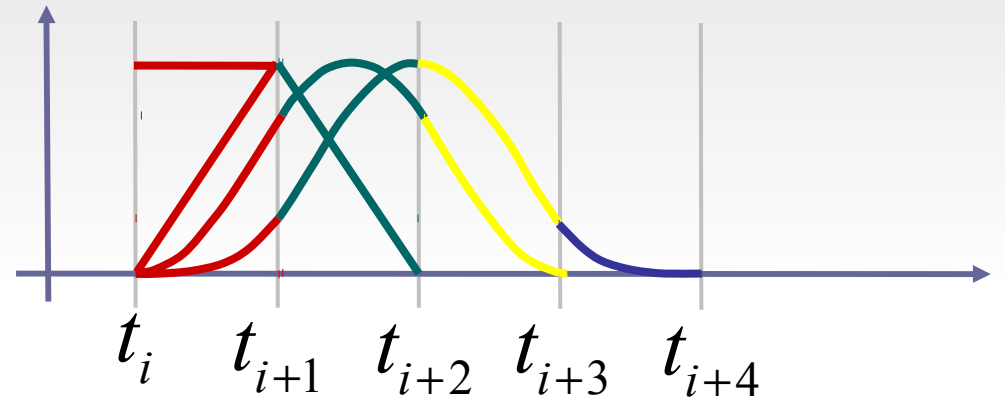
(convention $\frac{0}{0} = 0$)

Courbes B-splines

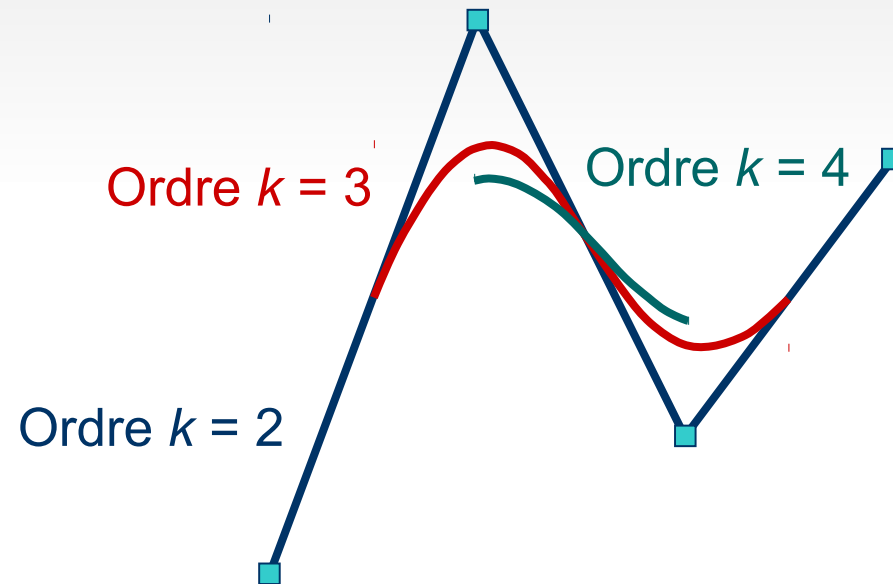
$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B_{i,2} = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} B_{i,1} + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} B_{i+1,1}$$

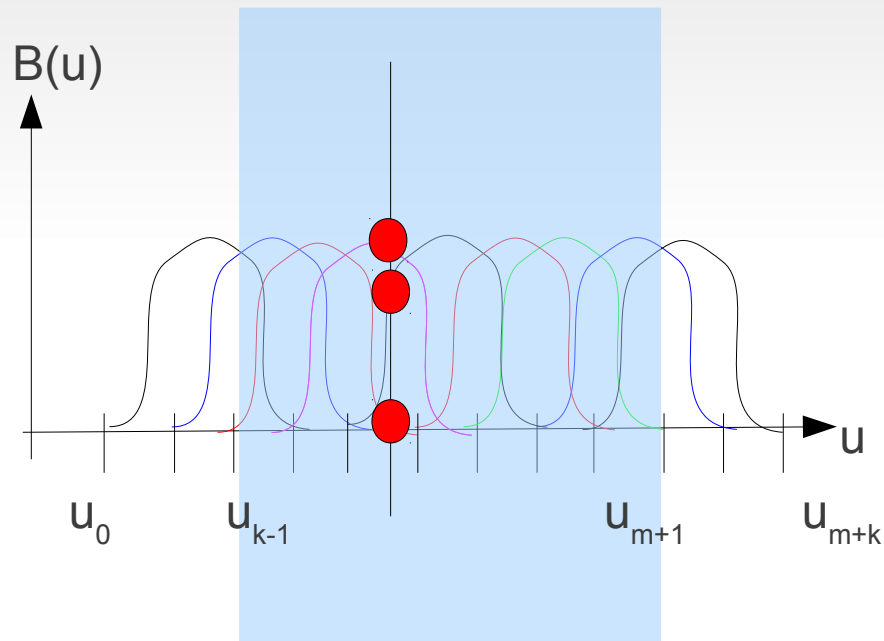
$$B_{i,3} = \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} B_{i,1} + \left\{ \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i} \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} + \frac{t_{i+3} - t}{t_{i+3} - t_{i+2}} \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+2} - t_{i+1}} \right\} B_{i+1,1} + \frac{t_{i+3} - t}{t_{i+3} - t_{i+2}} \frac{t_{i+3} - t}{t_{i+3} - t_{i+2}} B_{i+2,1}$$



Courbes B-splines



B-Splines : nb morceaux



Exemple ici :

$k=3$

$m=8$

$m-k+2=7$

$$\begin{aligned} N &= [m + k - (k - 1)] - [0 + (k - 1)] \\ &= [m + 1] - [k - 1] \\ &= m - k + 2 \end{aligned}$$

Continuité

Paramétrique : C^k

$P(u)$ continue jusqu'à la $k^{\text{ème}}$ dérivée

Valeur, pente, 2^e dérivaté,...

Important pour les animations (paramètre = temps)

Géométrique : G^k

P continue indépendamment de u jusqu'à la k^e dérivée

Position, tangent, é courbure,...

CAGD,...

Une courbe peut être C^k et pas G^k et vice versa

Surfaces Bicubiques

Surfaces à l'aide de fonctions bicubiques

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ polynômes bicubiques en u et v

16 termes pour combiner les puissances de u et v

Matriciellement

$$u = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}$$

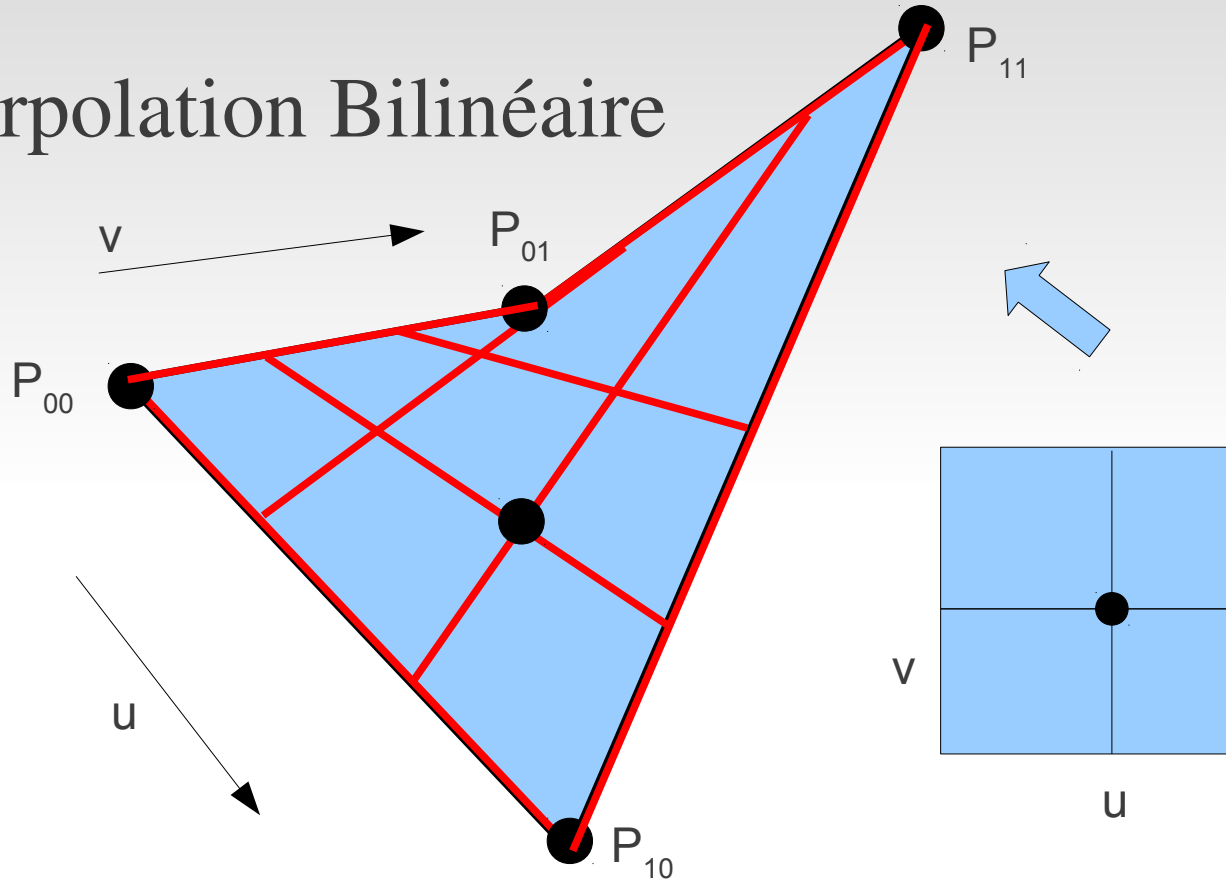
$$s(u,v) = uAv^T \quad \text{ou encore} \quad s(u,v) = uMG M^T v^T$$

avec M matrice de base et G matrice de points de contrôle

(produit tensoriel)

Produit Tensoriel

Interpolation Bilinéaire



$$P(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

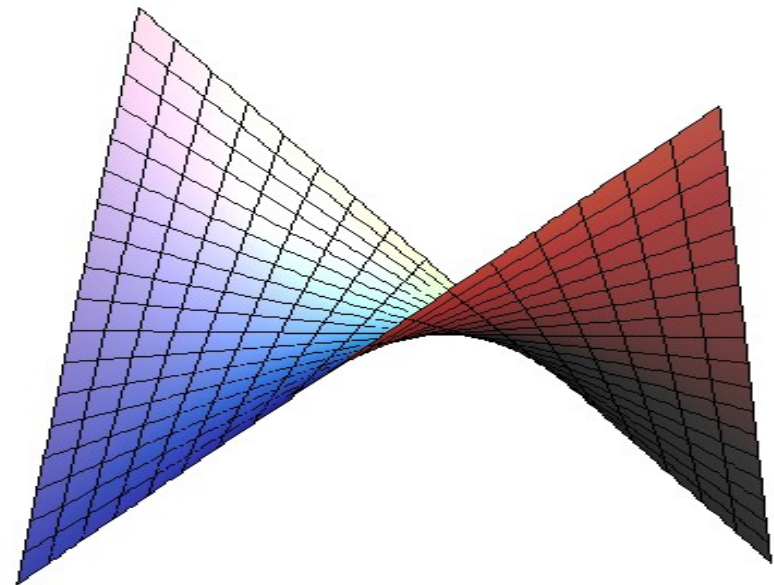
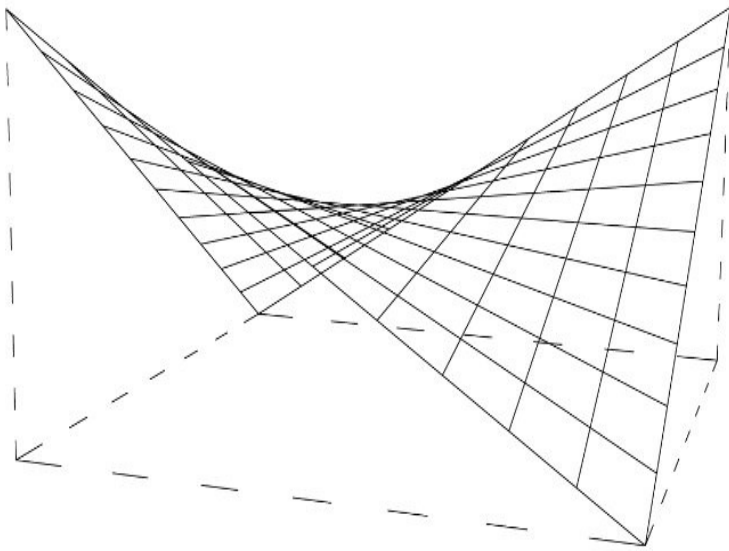
$$P_{0,0}^{0,1} = (1-v)P_{0,0} + vP_{0,1}$$

$$P_{1,0}^{1,1} = (1-v)P_{1,0} + vP_{1,1}$$

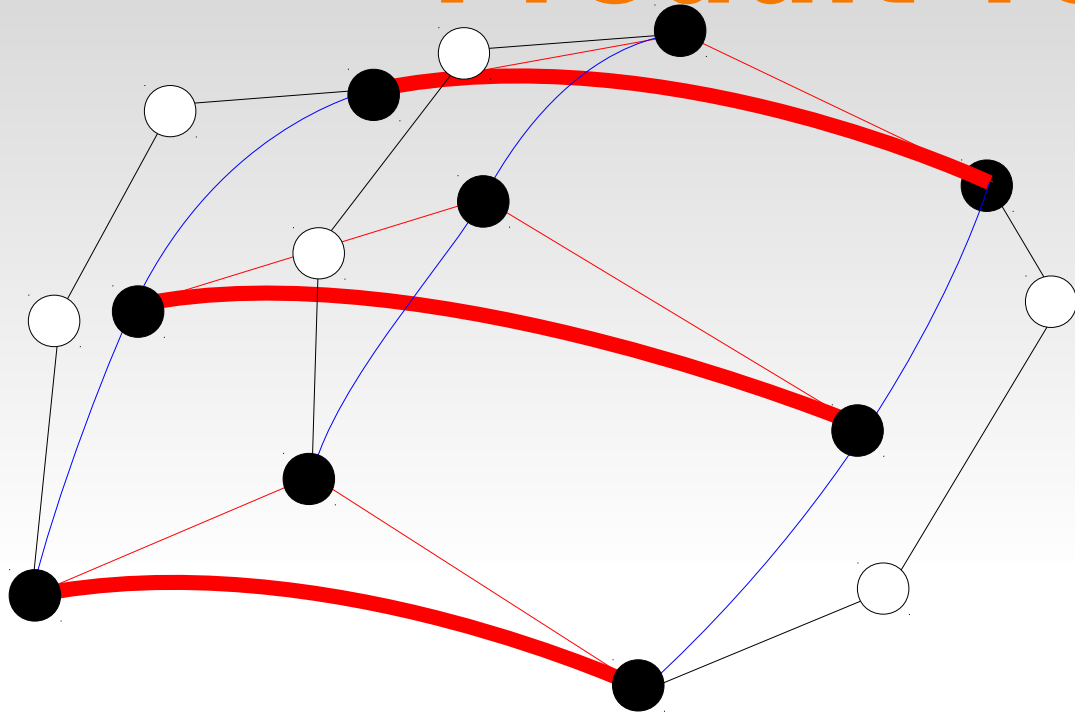
$$P(u, v) = P_{0,0}^{1,1}(u, v) = (1-u)P_{0,0}^{0,1} + uP_{1,0}^{1,1}$$

Produit Tensoriel

$$P(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \iff P(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{i,j} B_i^1(u) B_j^1(v)$$



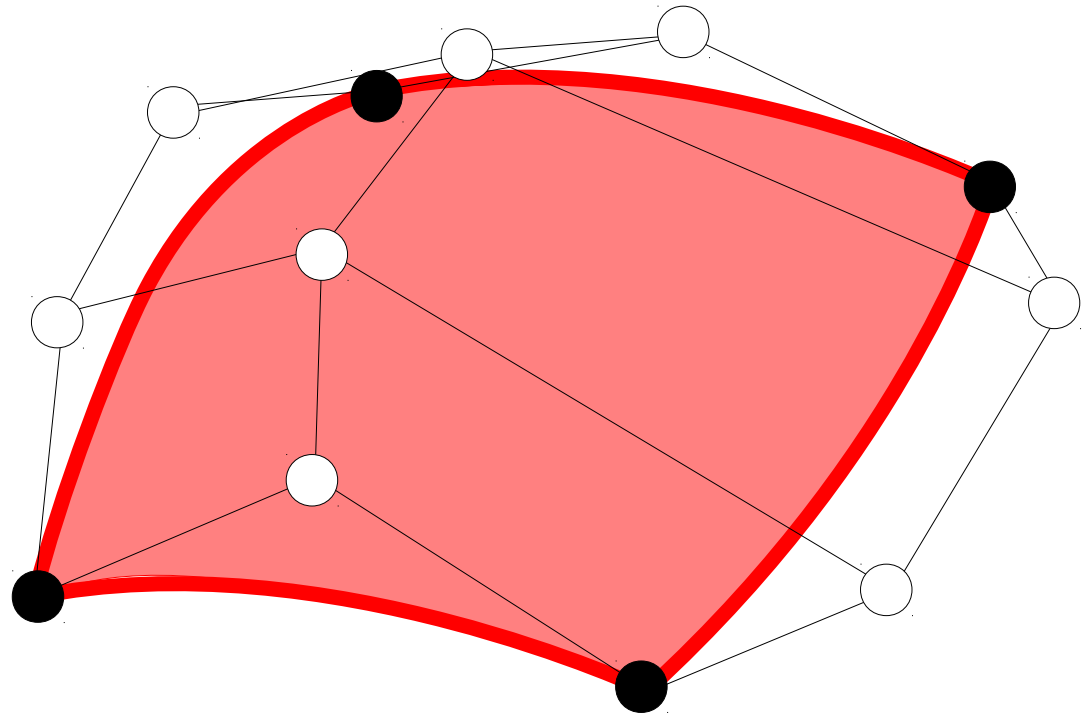
Produit Tensoriel



$$P^m(u) = \sum_{i=0}^m P_i B_i^m(u)$$

$$P_i = P_i(v) = \sum_{j=0}^n P_{i,j} B_j^n(v)$$

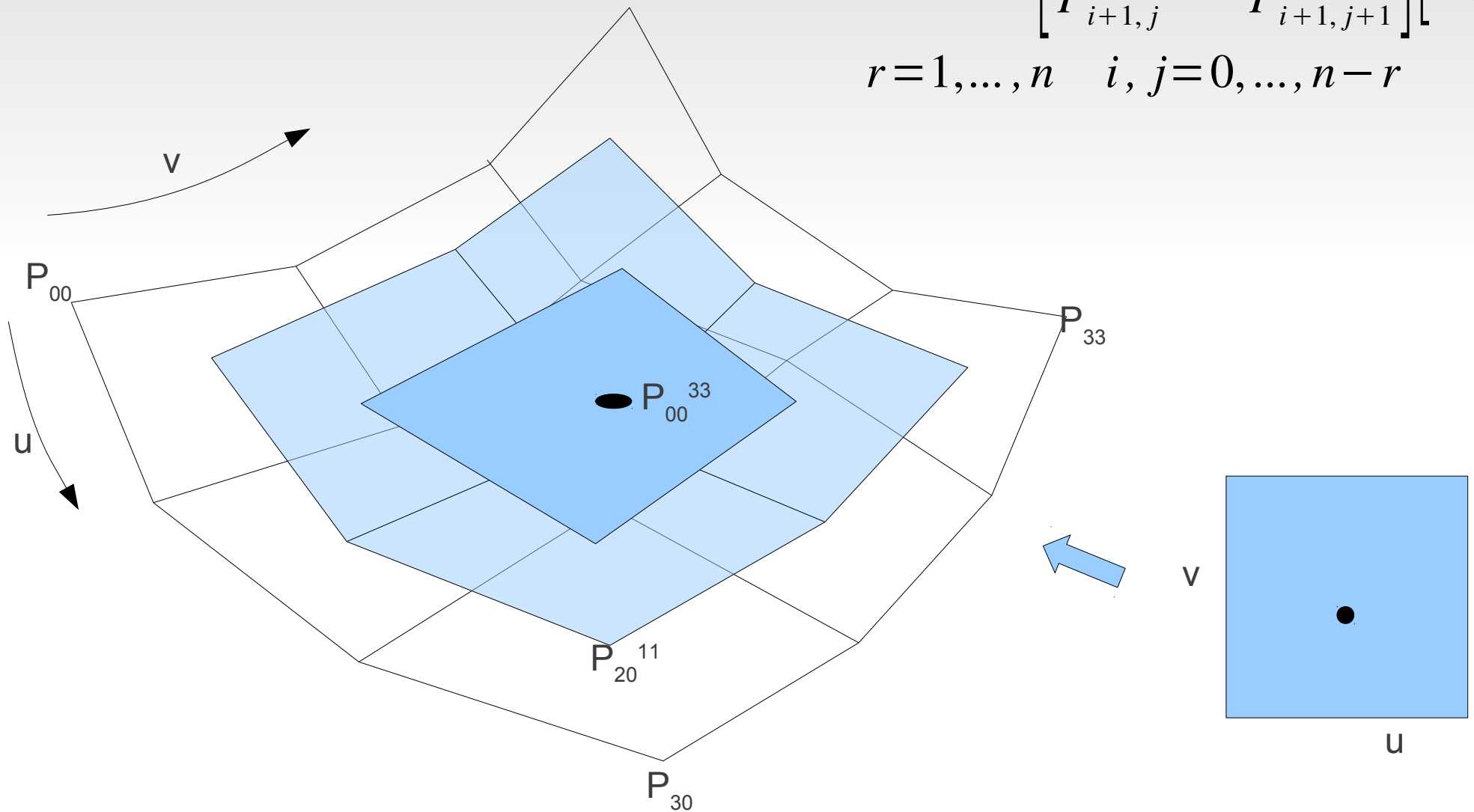
$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)$$



De Casteljau

$$P_{i,j}^{r,r} = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i,j}^{r-1,r-1} & P_{i,j+1}^{r-1,r-1} \\ P_{i+1,j}^{r-1,r-1} & P_{i+1,j+1}^{r-1,r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

$$r=1,\dots,n \quad i,j=0,\dots,n-r$$



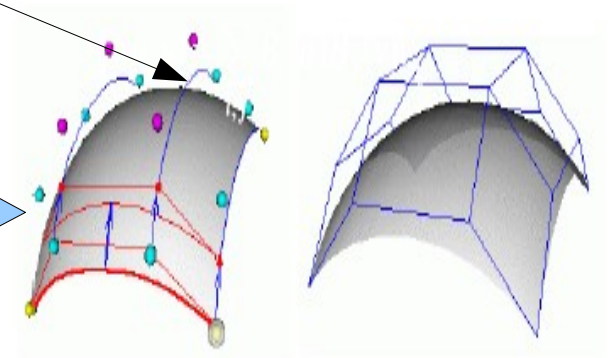
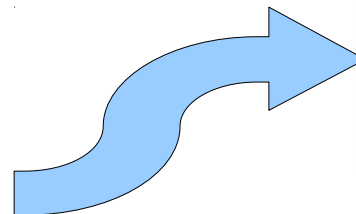
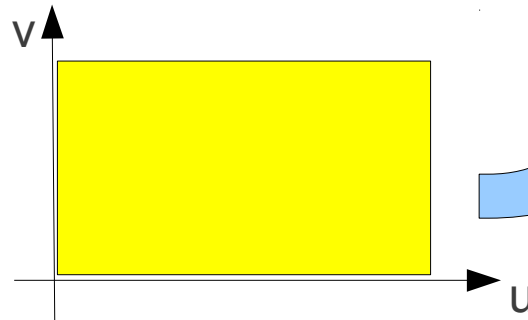
Surfaces de Bézier

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) \quad (u, v) \in [0, 1]^2$$

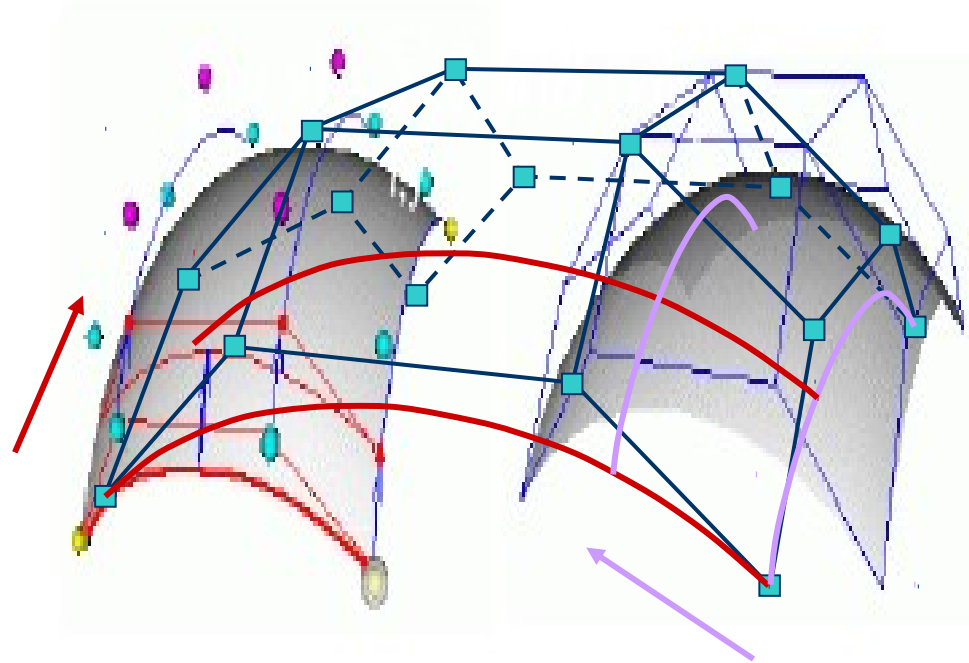
$P_{i,j}$ Réseau des points de contrôle

$B_i^m(u)$

$B_j^n(v)$ Fonctions de base de Bézier



Surfaces de Bézier



Surfaces B-splines

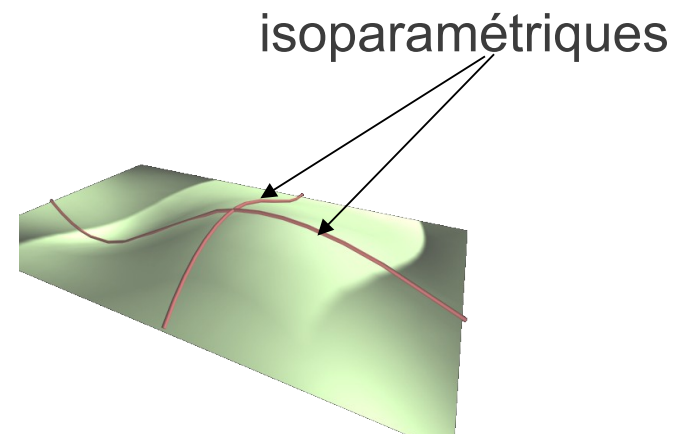
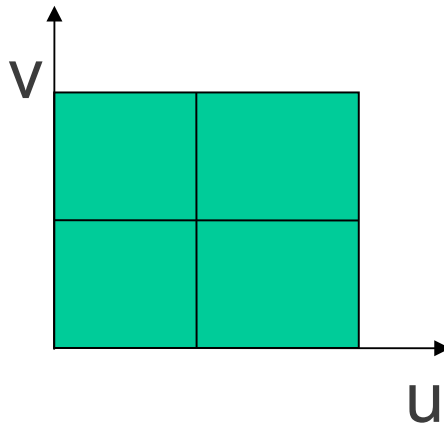
$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} N_i^k(u) N_j^l(v) \quad (u, v) \in [u_0, u_{m+k}] \times [v_0, v_{n+l}]$$

$P_{i,j}$ avec $i \in \{0, m\}$ et $j \in \{0, n\}$

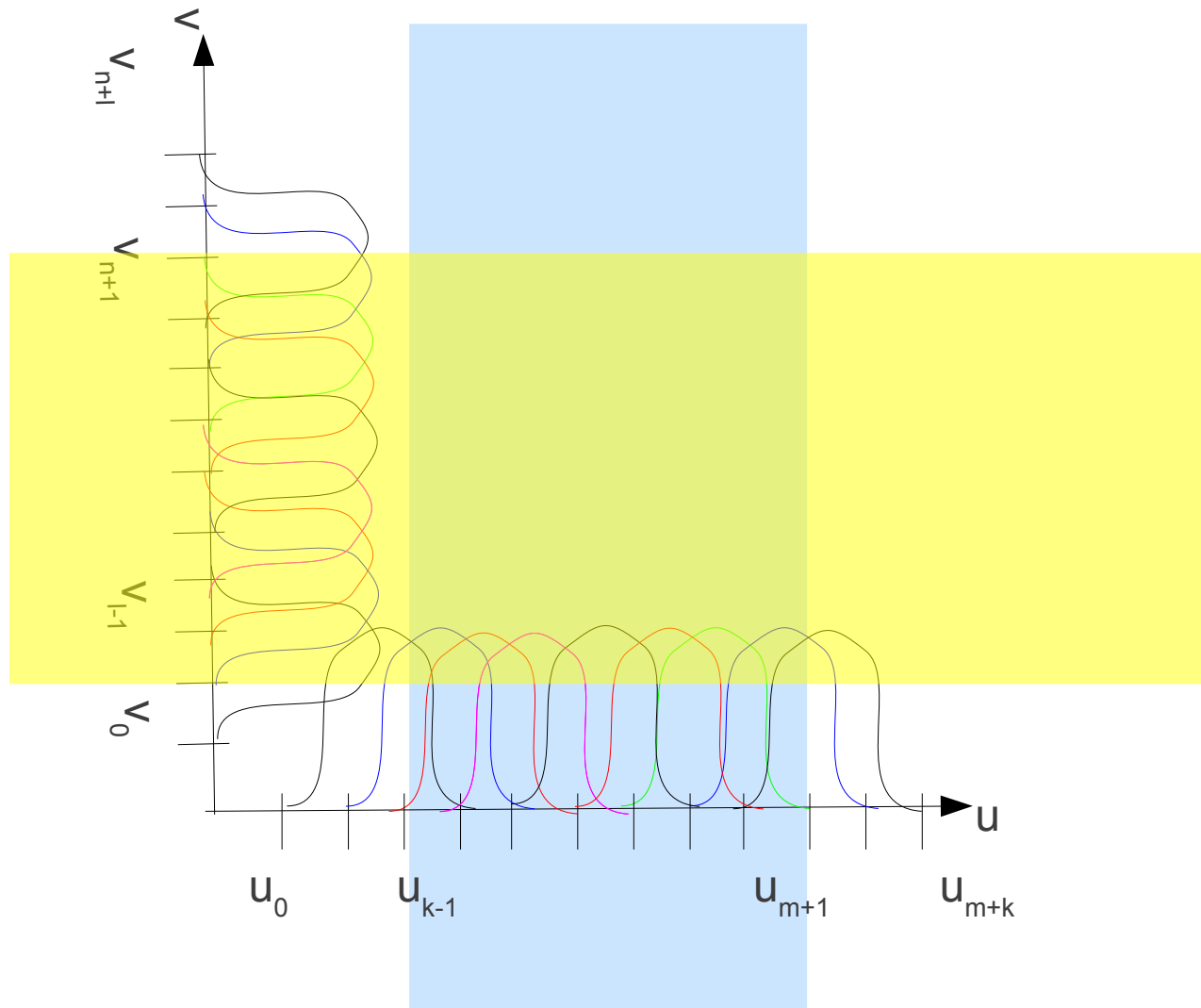
$$U = \{u_i / 0 \leq i \leq m+k \quad \wedge \quad u_0 \leq \dots \leq u_i \dots \leq u_{m+k}\}$$

$$V = \{v_j / 0 \leq j \leq n+l \quad \wedge \quad v_0 \leq \dots \leq v_j \dots \leq v_{n+l}\}$$

$N_i^k(u)$ et $N_j^l(v)$: fonctions de base



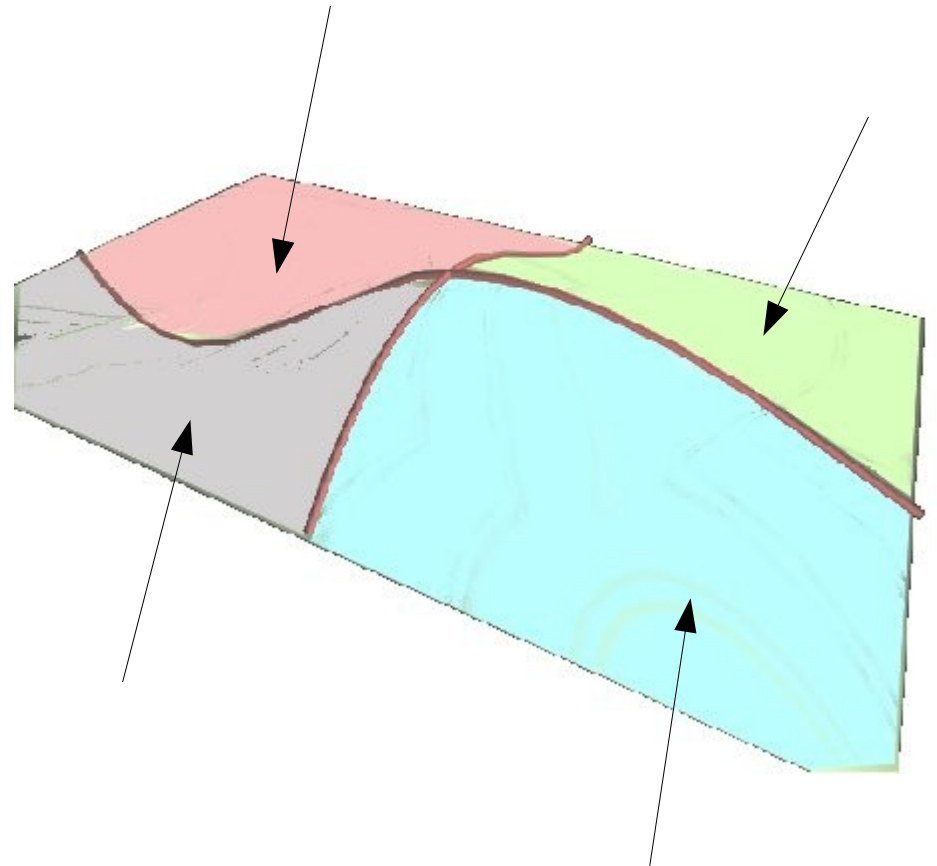
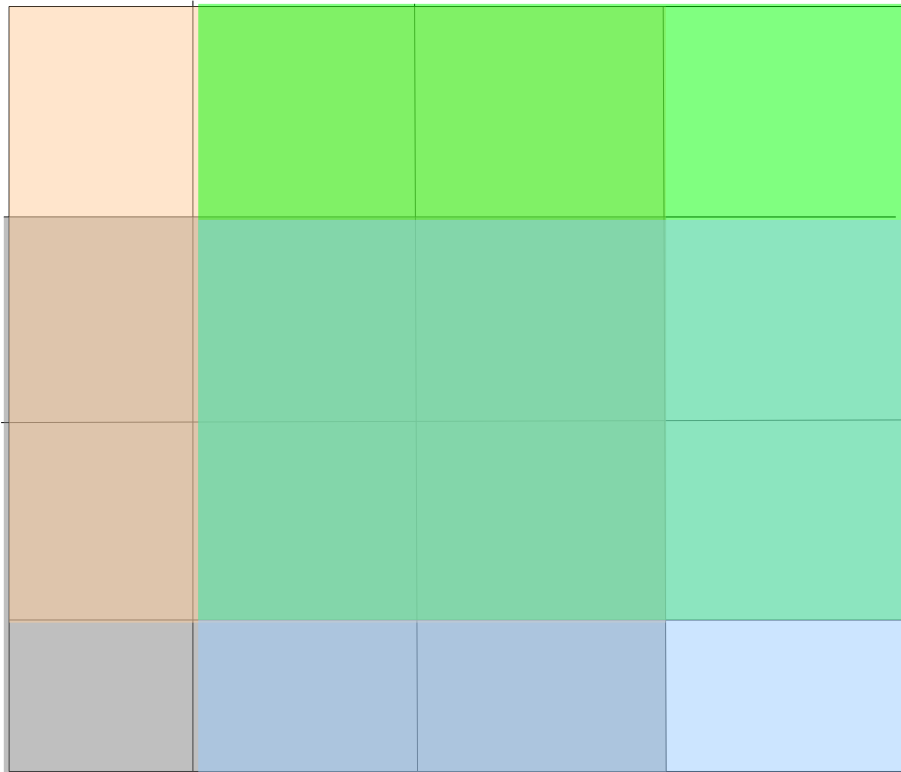
Surfaces B-Splines



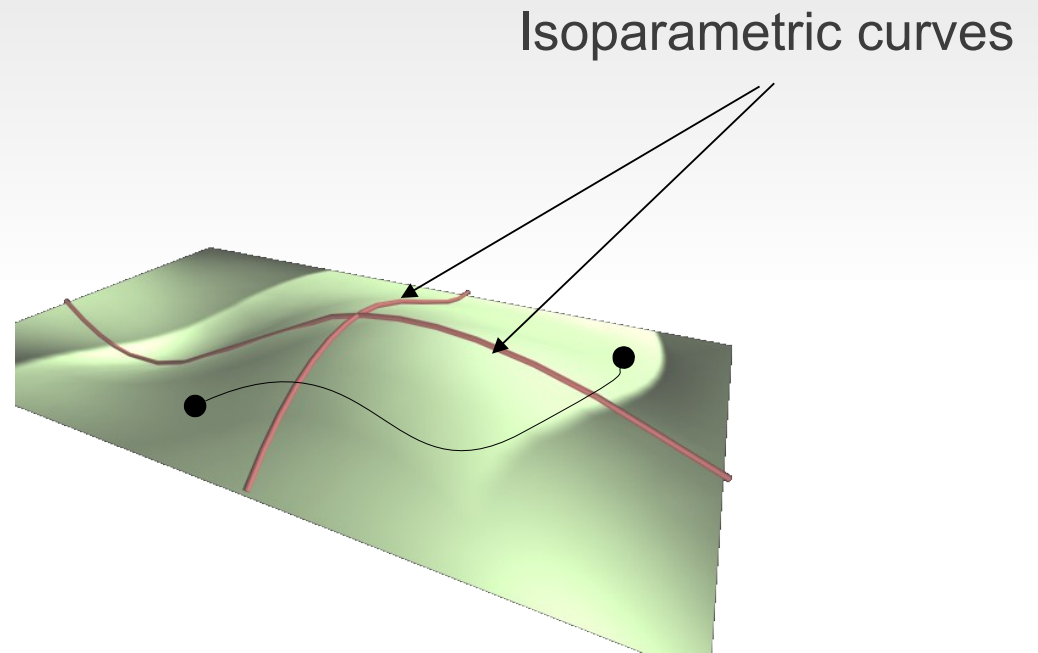
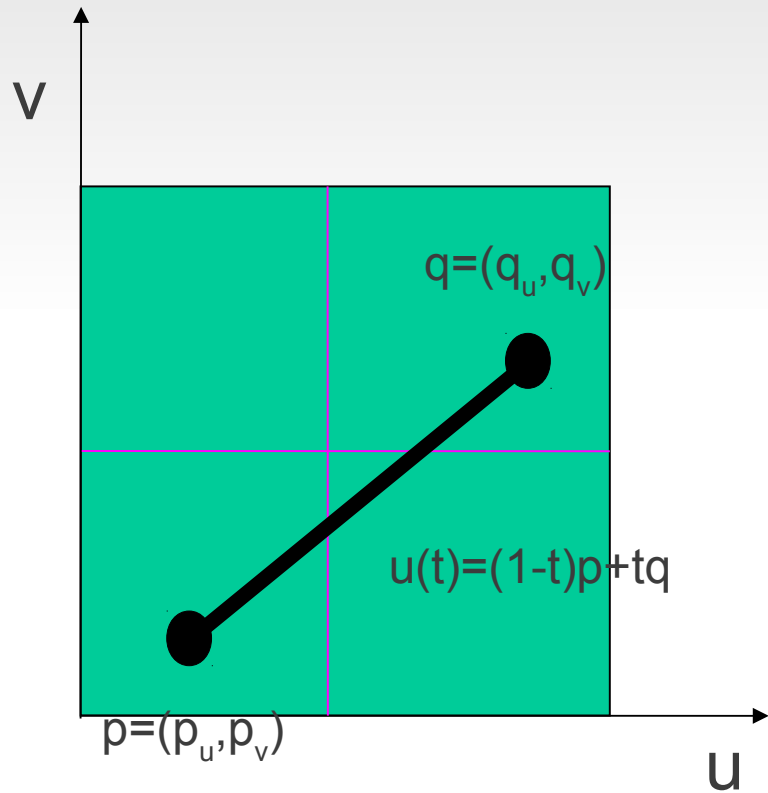
$$N = (m + k - 2) \times (n + l - 2)$$

B-Splines : carreaux (patchwork)

ex : bicubiques



Courbes sur surfaces



Vecteur Normal & Torsion

Vecteur Normal

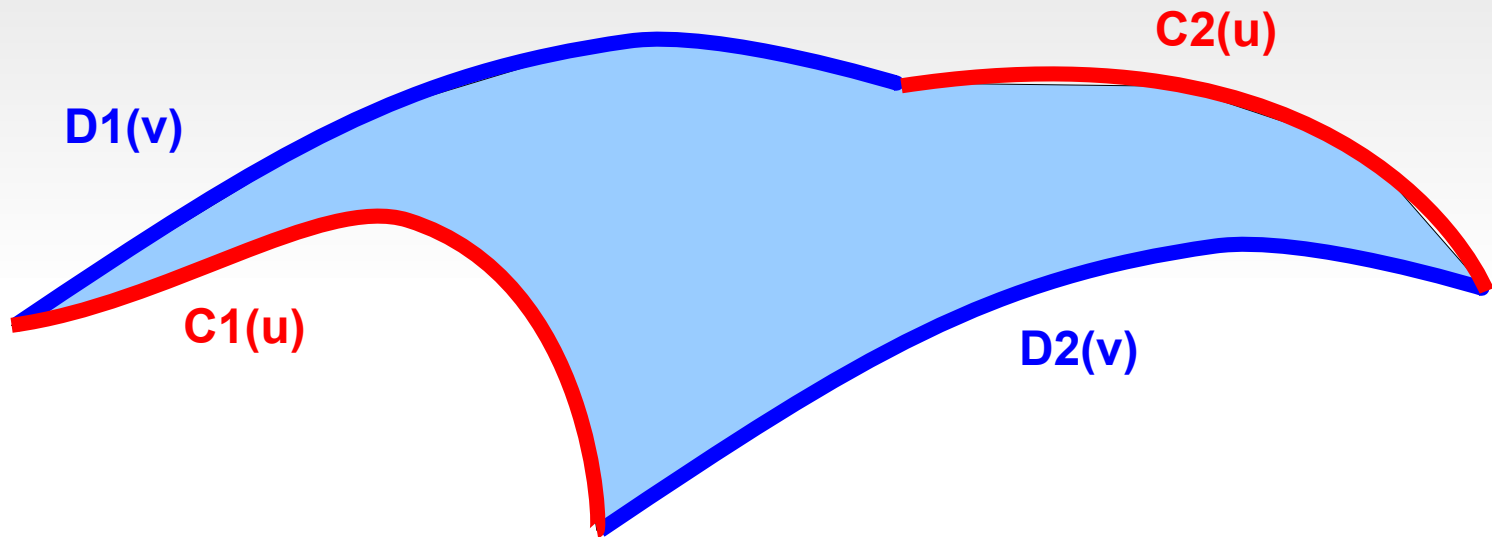
$$n(u, v) = \frac{\frac{\partial}{\partial u} s(u, v) \wedge \frac{\partial}{\partial v} s(u, v)}{\left\| \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) \wedge \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) \right\|}$$

Vecteur Torsion

$$t(u, v) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} s(u, v)}{\left\| \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} s(u, v) \right\|}$$

Carreaux de Coons

Idée : remplir entre courbes



Degré qcq

$$u \in [u_{\min}, u_{\max}], v \in [v_{\min}, v_{\max}]$$

Surfaces Réglées

Surface qui interpole $c_1(u)$ et $c_2(u)$

$$u \in [u_{\min}, u_{\max}], \quad v \in [0, 1].$$

trouver $x(u, v)$ / $x(u, 0) = c_1(u) \wedge x(u, 1) = c_2(u)$.

Solution la + simple : interpolation linéaire

$$x(u, v) = (1 - v) c_1(u) + v c_2(u)$$

$$x(u, v) = (1 - v) x(u, 0) + v x(u, 1)$$

Carreaux de Coons

2 surfaces réglées

$$r_c(u, v) = (1-v)c_1(u) + vc_2(u) = (1-v)x(u, 0) + vx(u, 1)$$

$$r_d(u, v) = (1-u)d_1(v) + ud_2(v) = (1-u)x(0, v) + ux(1, v)$$

r_c interpole $c_1(u)$ et $c_2(u)$ mais ne reproduit pas $d_1(v)$

ni $d_2(v)$ (idem pour r_d) $\Rightarrow$ retirer interpolation

bilinéaire

$$r_{cd}(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) \\ x(1,0) & x(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

Carreau de Coons : $x = r_c + r_d - r_{cd}$

Carreaux de Coons

Coons Bilinéaire

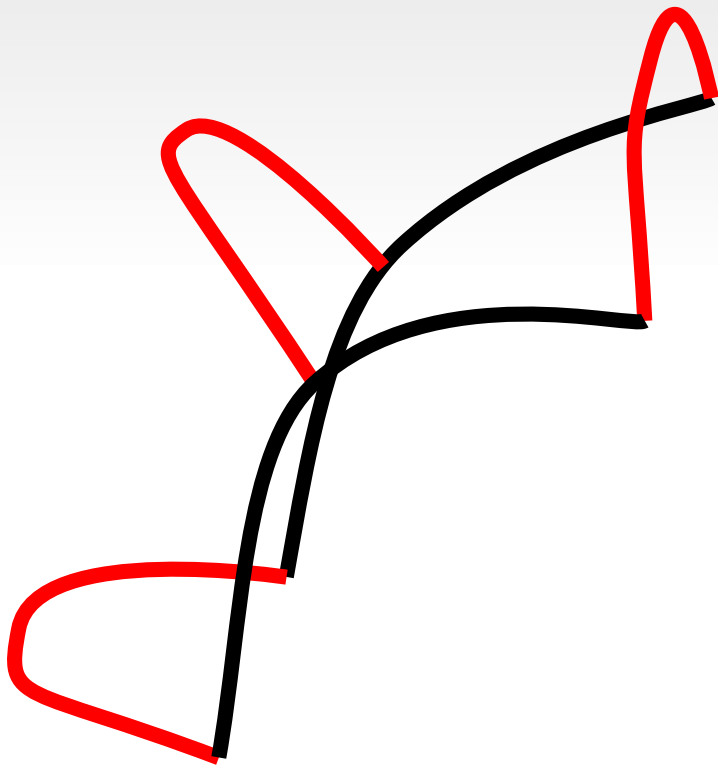
$$\begin{aligned} x(u, v) = & \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, v) \\ x(1, v) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} x(u, 0) \\ x(u, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, 0) & x(0, 1) \\ x(1, 0) & x(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Coons Général

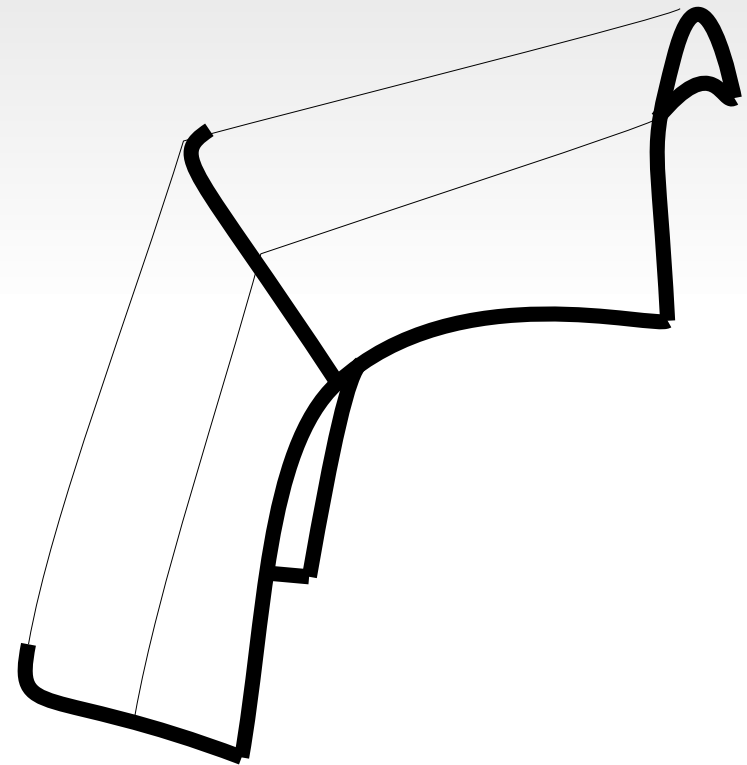
$$\begin{aligned} x(u, v) = & \begin{bmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, v) \\ x(1, v) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} x(u, 0) \\ x(u, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(v) \\ g_2(v) \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, 0) & x(0, 1) \\ x(1, 0) & x(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(v) \\ g_2(v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Coons Patches

Inconvénient



$u \in [0, 2]$, $v \in [0, 1]$



Bords $x(u, 0)$ et $x(u, 1)$ différentiables
Dérivées croisées discontinues le long de $x(1, v)$

Carreaux de Coons Mélange Partiel Bicubique

Fonctions de Hermite : $f_1=g_1=H_3^0$ et $f_2=g_2=H_3^3$

Derivée croisée le long de $u=0$:

$$x_u(0, v) = \begin{bmatrix} x_u(0,0) & x_u(0,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0^3(v) \\ H_3^3(v) \end{bmatrix}$$

Tous les autres termes disparaissent car

$$\frac{dH_{3i}^3(0)}{du} = \frac{dH_{3i}^3(1)}{du} = 0 \quad i=0,1$$

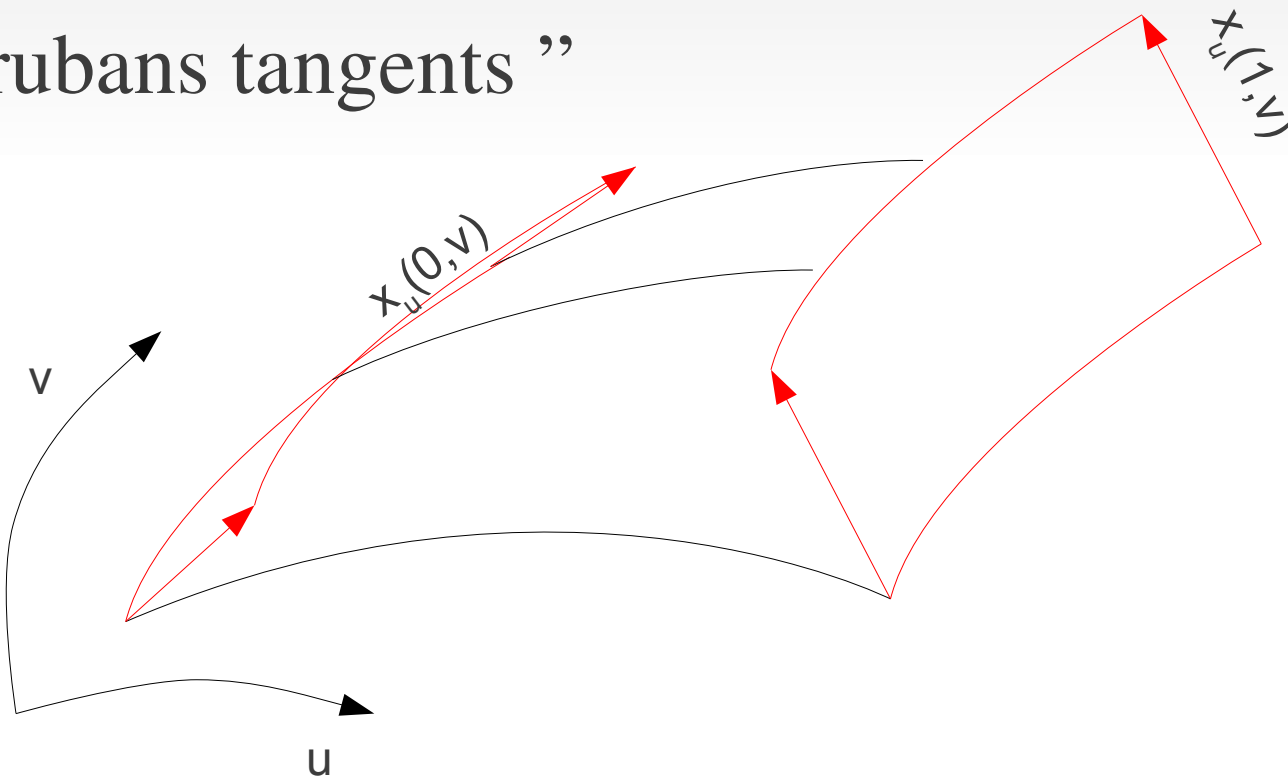
Derivée croisée le long d'un bord dépend seulement de ce bord

Inconvénient : aplats aux coins $x_{uv}(i, j)=0 \quad i, j \in \{0,1\}$

Carreaux de Coons Mélange Partiel Bicubique

Données : $x(u,0), x(u,1), x(0,v), x(1,v)$
 $x_v(u,0), x_v(u,1), x_u(0,v), x_u(1,v)$

”rubans tangents”



Carreaux de Coons Mélange Partiel Bicubique

Surfaces réglées généralisées

$$h_c(u, v) = H_0^3(u)x(0, v) + H_1^3(u)x_u(0, v) + H_2^3(u)x_u(1, v) + H_3^3(u)x(1, v)$$

$$h_d(u, v) = H_0^3(v)x(u, 0) + H_1^3(v)x_v(u, 0) + H_2^3(v)x_v(u, 1) + H_3^3(v)x(u, 1)$$

$$h_{cd}(u, v) = \begin{bmatrix} H_0^3(u) & H_1^3(u) & H_2^3(u) & H_3^3(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0,0) & x_v(0,0) & x_v(0,1) & x(0,1) \\ x_u(0,0) & x_{uv}(0,0) & x_{uv}(0,1) & x_u(0,1) \\ x_u(1,0) & x_{uv}(1,0) & x_{uv}(1,1) & x_u(1,1) \\ x(1,0) & x_v(1,0) & x_v(1,1) & x(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0^3(v) \\ H_1^3(v) \\ H_2^3(v) \\ H_3^3(v) \end{bmatrix}$$

Carreau de Coons : $x = h_c + h_d - h_{cd}$

Bézier Triangles : De Casteljau

Control net : $1/2(n+1)(n+2)$ vertices

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & P_{040} & & \\
 & & & & P_{031} & P_{130} & \\
 & & & P_{022} & P_{121} & P_{220} & \\
 & & P_{013} & P_{112} & P_{211} & P_{310} & \\
 P_{004} & P_{103} & P_{202} & P_{301} & P_{400} & &
 \end{array}$$

Denote P_{ijk} by P_i with $|i|=i+j+k$ and $i,j,k \geq 0$

$\mathbf{e1}=(1,0,0)$, $\mathbf{e2}=(0,1,0)$ and $\mathbf{e3}=(0,0,1)$

Given:

$P_i \in E^3$; $|i|=n$; a point $\in E^2$ with barycentric coordinates $\mathbf{u}$

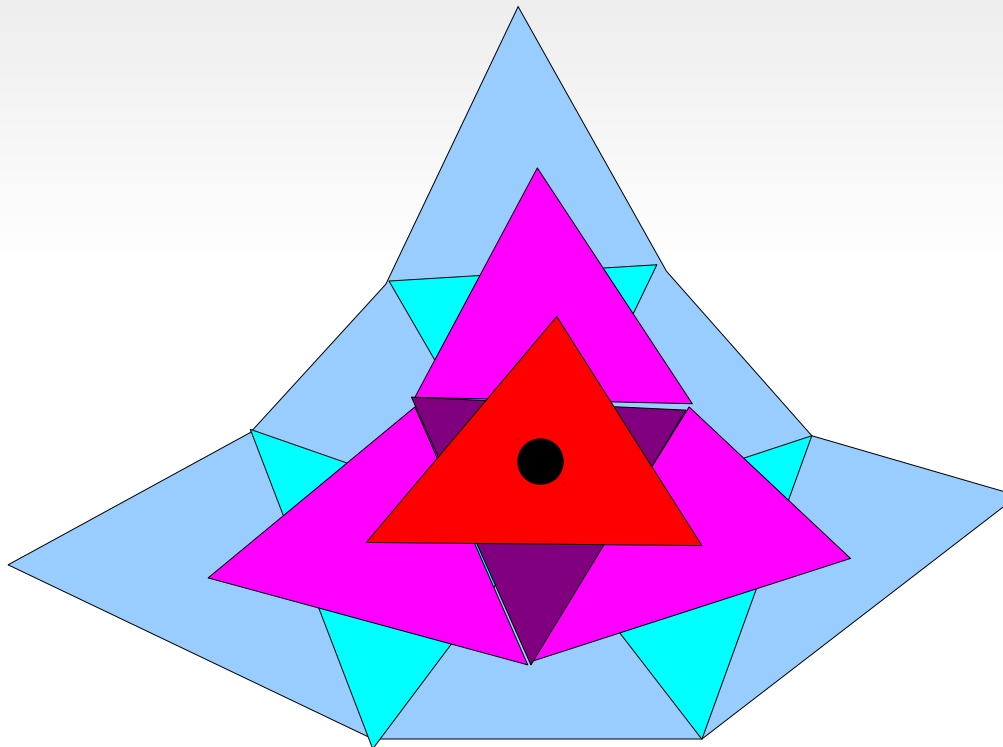
$$P_i^r(\mathbf{u}) = u P_{i+\mathbf{e1}}^{r-1}(\mathbf{u}) + v P_{i+\mathbf{e2}}^{r-1}(\mathbf{u}) + w P_{i+\mathbf{e3}}^{r-1}(\mathbf{u})$$

with $r=1, \dots, n \wedge |i|=n-r \wedge P_i^0(\mathbf{u})=P_i$

$P_0^n(\mathbf{u})$ is on the triangular Bézier patch

Bézier Triangles : De Casteljau

”Triangular” de Casteljau algorithm



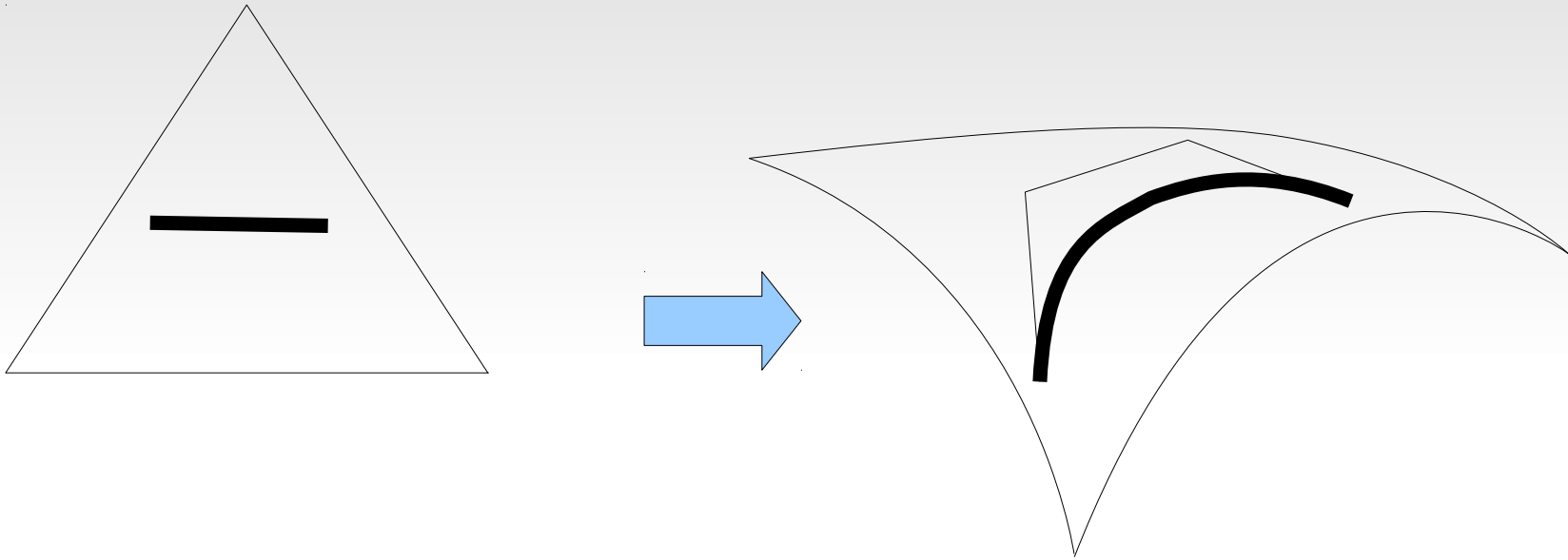
$$\text{Eg : } n=3, r=1 \rightarrow P_{200}^1 = uP_{300} + vP_{210} + wP_{201}$$

Bézier Triangles : Bernstein polynomials

$$B_i^n(\mathbf{u}) = \binom{n}{\mathbf{i}} u^i v^j w^k \quad |\mathbf{i}| = n$$

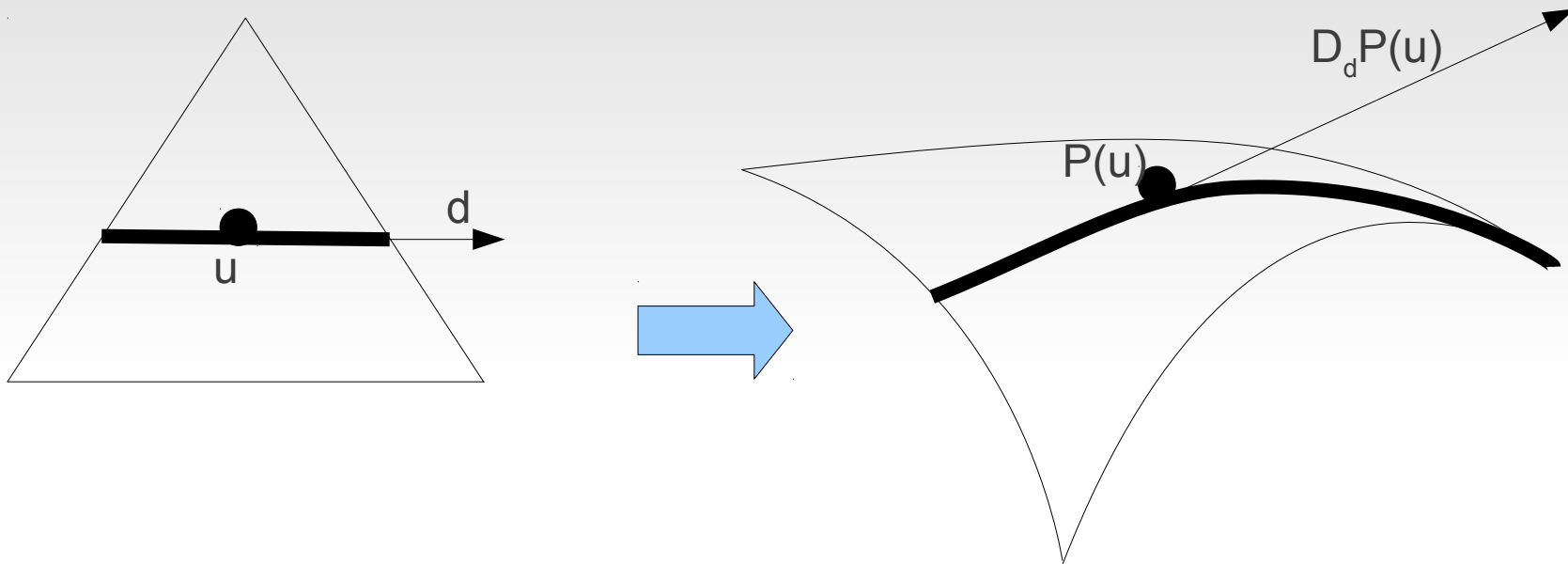
$$\begin{array}{c}
 v^4 \\
 4v^3w \quad 4vw^3 \\
 6v^2w^2 \quad 12uvw^2 \quad 6v^2w^2 \\
 4vw^3 \quad 12uvw^2 \quad 12u^2vw \quad 4v^3w \\
 w^4 \quad 4uw^3 \quad 6u^2w^2 \quad 4u^3w \quad u^4
 \end{array}$$

Bézier Triangles



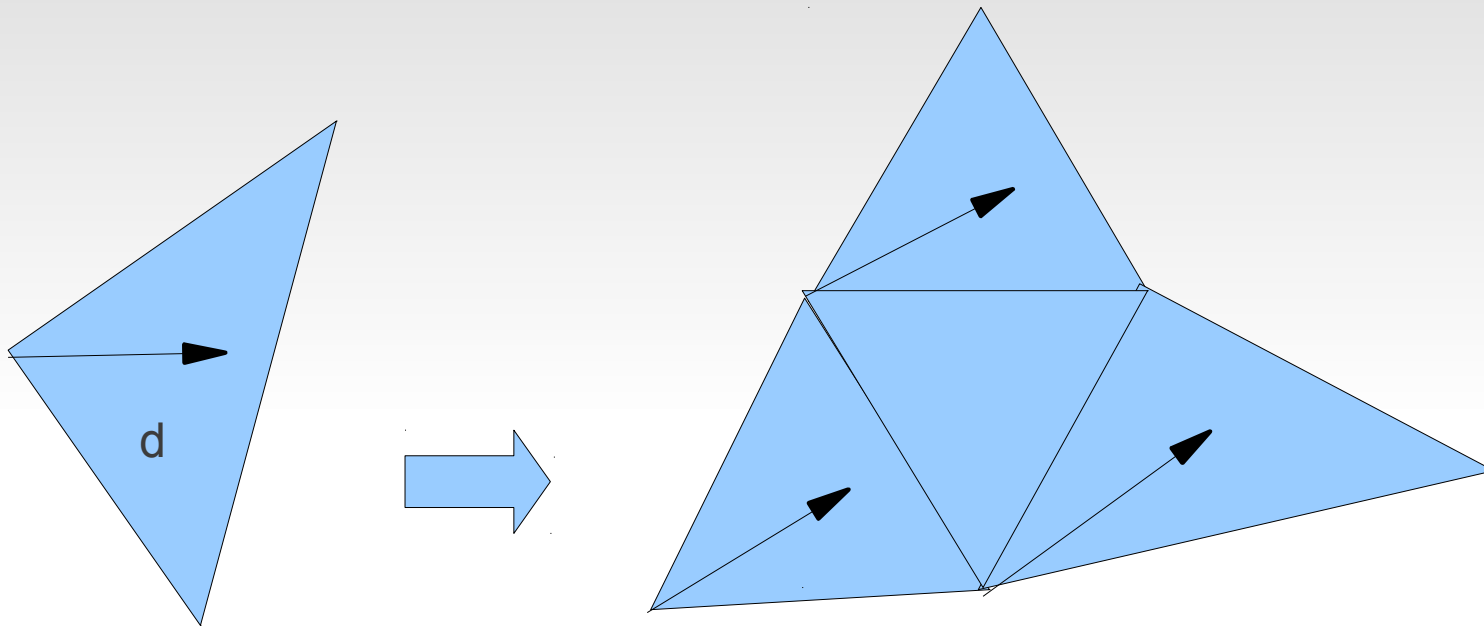
A curve on a surface : a straight line in the domain is mapped to a curve on a triangular patch

Derivatives

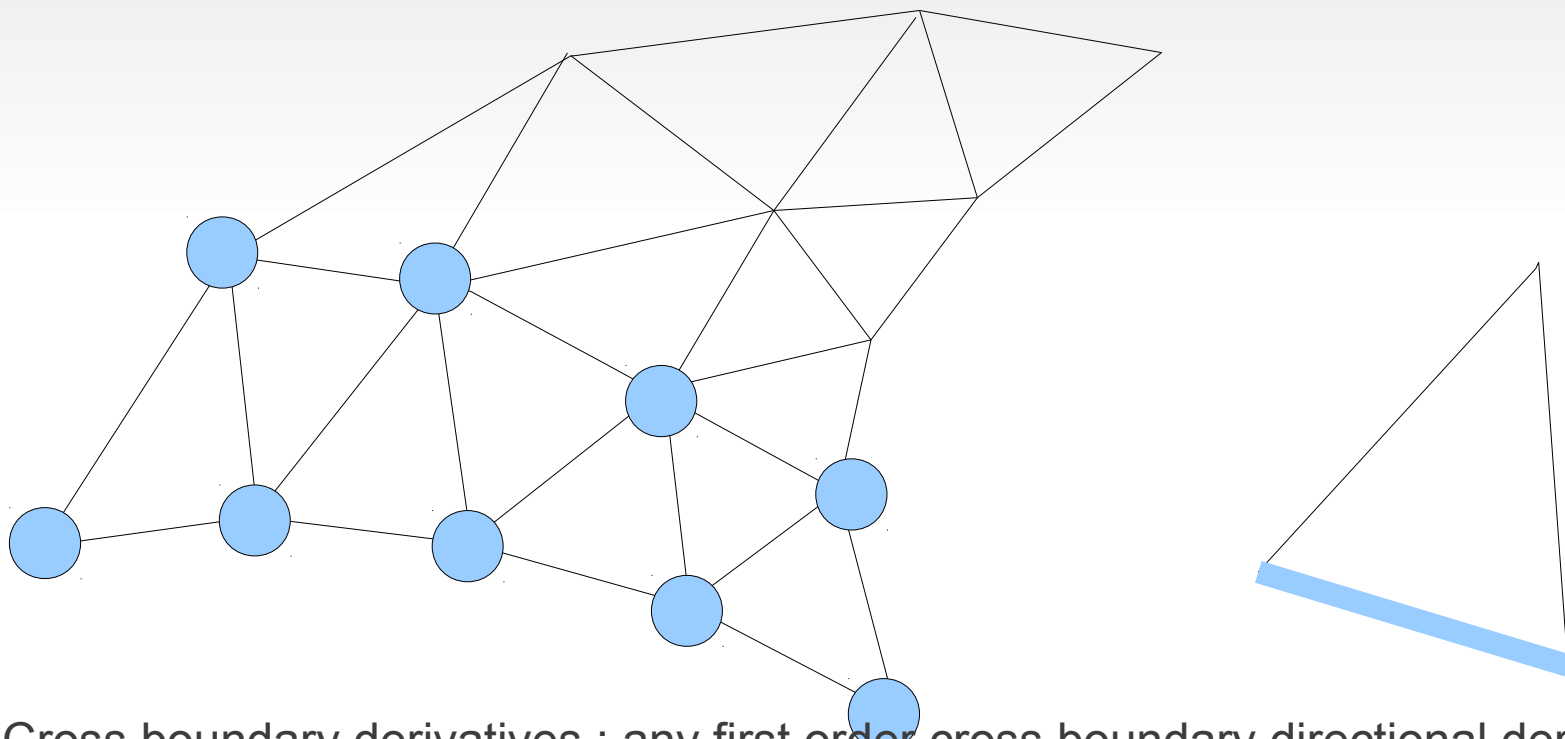


Directional derivatives : a straight line in the domain is mapped to a curve on the patch

$$d = u_2 - u_1$$
$$D_d P(u) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{|d|} [P(u+d) - P(u)] D_d$$



Directional derivatives : a vector d in the domain is mapped to the control net subtriangles to form the vectors $P_j^1(d)$



Cross boundary derivatives : any first order cross boundary directional derivative of a quartic evaluated along the indicated edge depends only of the two indicated rows of Bézier points

Interpolation

